Die Beweisverfahren

FlorianM
LaTeXed by huepfer

17. August 2005

Diesen Artikel „Die Beweisverfahren“ möchte ich nutzen, um euch vier verschiedene Beweise vorzustellen, die ein Schüler zu Beginn der Oberstufe eines Gymnasiums beherrschen sollte.
Zuerst wird immer das Beweisverfahren an Beispielen erläutert, als nächstes folgt der allgemeine Beweis bzw. eine Zusammenfassung zu dem entsprechenden Beweis, danach weitere Aufgaben zum Lösen und als letztes eine allgemeine Zusammenfassung und Einschätzung zu dem Thema „Beweisverfahren“.

Inhaltsverzeichnis

1 Der direkte Beweis

Beispiel 1:

Behauptung: Das Quadrat jeder geraden natürlichen Zahl n ist gerade.

n sei eine gerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als n=2k darstellen (k ist eine natürliche Zahl). Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot 2k^2$$

n^2 ist daher das Doppelte einer natürlichen Zahl und damit gerade.

Beispiel 2:

Behauptung: Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.

n sei eine ungerade Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als n=2k+1 darstellen (k ist eine natürliche Zahl oder 0). Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

$\longrightarrow$ 2 ist ungerade.

1.1 Überblick: Der direkte Beweis

Beim direkten Beweis beweist man die Behauptung durch Anwenden von bewiesenen Aussagen, Definitionen und durch logische Folgerungen.

1.2 Weitere Aufgaben

Beweise folgende Behauptungen mit dem direkten Beweis:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lösungen folgen weiter unten.

---

2 Der indirekte Beweis

Beispiel 1:

Man beweise den Satz: Es gibt keine rationale Zahl x, für die $x^2 = 2$ gilt.
Wenn der Satz nicht gilt, muss es eine rationale Zahl z mit $z^2 = 2$ geben.
(Man kann z sogar als positiv ansehen.)
Jede positive rationale Zahl lässt sich durch einen gekürzten Bruch darstellen:

$$z = \frac{p}{q}$$

Weil sich der Bruch nicht mehr kürzen lässt haben p und q keinen gemeinsamen Teiler.
Aus $z^2 = 2$ folgt weiter $\frac{p^2}{q^2} = 2$ und somit nach Umformung $p^2 = 2 \cdot q^2$.
Nun überlegt man sich, wie oft der Primfaktor 2 in die Zahl p^2 passt und wie oft $2q^2$ auftreten kann. In p kann der Faktor 2 keinmal oder einmal oder zweimal oder dreimal ... vorkommen.
In $2q^2$ muss er dann doppelt so oft wie in p auftreten (also keinmal oder zweimal oder viermal oder sechsmal usw.).
In q^2 kann entsprechend der Primfaktor 2 keinmal oder 2mal oder 4mal oder 6mal usw. auftreten, in $2 \cdot q^2$ also einmal oder dreimal oder 5mal oder 7mal usw.
In p^2 tritt der Primfaktor 2 also in anderer Anzahl auf als in $2 \cdot q^2$, obgleich $p^2 = 2 \cdot q^2$ und beide Zahlen links und rechts vom Gleichheitszeichen gleich sind.
Das ist ein Widerspruch.
Es gibt aber nur zwei Möglichkeiten: Entweder der Satz gilt oder er gilt nicht. Die zweite Möglichkeit führt zu einem Widerspruch. Es bleibt nur die erste bestehen.

Der Satz ist bewiesen.

Beispiel 2:

Man beweise: Es gibt unendlich viele Primzahlen.
Wenn der Satz nicht gilt, dann gibt es nur endlich viele Primzahlen: $p_1 = 2$; $p_2 = 3$; $p_3 = 5$; $p_4 = 7$; $p_5 = 11$; $\ldots$; p_n, wobei p_n die größte Primzahl sei.
Man bildet das Produkt aller Primzahlen und addiert 1:

$$b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Die entstehende Zahl b ist keine Primzahl, weil sie größer ist als die größte Primzahl p_n. Sie muss sich daher aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ multiplikativ zusammensetzen. b muss daher durch mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ teilbar sein.
Anderseits erkennt man bei Division von b durch eine Primzahl, dass b wegen der Addition von 1 durch keine Primzahl teilbar ist.
Das ist ein Widerspruch.
Da es aber hier auch wieder nur zwei Möglichkeiten gibt (Der Satz ist richtig oder falsch), ist der Satz richtig, da die Annahme zu einem Widerspruch führt.

Der Satz ist bewiesen.

2.1 Analyse und Zusammenfassung des indirekten Beweises

Den zu beweisenden Satz bezeichnet man beispielsweise mit A. A lautet in

- Beispiel 1: Es gibt keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$
- Beispiel 2: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

In beiden Beispielen wird von der Negation $\neg A$ ausgegangen. $\neg A$ lautet in

- Beispiel 1: Es gibt eine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$
- Beispiel 2: Es gibt endlich viele Primzahlen.

Dann zieht man in beiden Beweisen aus $\neg A$ Folgerungen, die zu einem Widerspruch führen. Es werden nämlich eine Aussage C und die Negation $\neg C$ gefolgert.
C lautet in

- Beispiel 1: In p^2 kann der Primfaktor 2 keinmal oder zweimal oder viermal oder sechsmal usw. auftreten.
- Beispiel 2: b ist durch mindestens eine Primzahl teilbar.

Die ebenfalls gefolgerte Negation $\neg C$ lautet in

- Beispiel 1: In $p^2 (= 2q^2)$ kann der Primfaktor 2 nicht keinmal oder zweimal oder viermal oder sechsmal usw. auftreten.
- Beispiel 2: b ist durch keine Primzahl teilbar.

In beiden Fällen erhält man:

$$\neg A \rightarrow C \text{ und} \neg A \rightarrow \neg C$$

Daraus folgt A, denn nur eine der beiden Möglichkeiten A bzw. $\neg A$ kann gelten. $\neg A$ führt zu dem Widerspruch C und $\neg C$.
Man kann den letzten Schluss auch durch die folgende Schlussregel beschreiben:

$$\begin{gathered} \neg A \rightarrow C \\ \neg A \rightarrow \neg C \\ -- - -- \\ A \end{gathered}$$

Der Strich wird „also“ gelesen.

In der Schule würde man nun die Schüler einen Merkkasten aufstellen lassen.
Wollen wir dieses hier auch mal tun:

In einem indirekten Beweis geht man von der Negation $\neg A$ des zu beweisenden Satzes A aus und folgert daraus einen Widerspruch C und $\neg C$. Daraus kann man auf A schließen. Die folgende Schlussregel wird dabei angewendet:

$$\neg A \rightarrow C$$
$$\neg A \rightarrow \neg C$$
$$-- - --$$
$$A$$

Beim indirekten Beweis nimmt man also an, dass das Gegenteil der Behauptung wahr ist. Danach führt man diese Annahme mit den gleichen Folgerungen und Methoden wie beim direkten Beweis zu einem Widerspruch und damit ist die Behauptung bewiesen.

2.2 Weitere Aufgaben

Beweise folgende Behauptungen mit dem indirekten Beweis.
a) Die Wurzel aus einer geraden natürlichen Quadratzahl n ist gerade.
b) Die Wurzel aus einer ungeraden natürlichen Quadratzahl n ist ungerade.
c) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

---

3 Der Gegenbeweis

Den Gegenbeweis möchte ich euch mit einer ganz simplen Rechnung nahe bringen, damit ihr das Prinzip versteht, was man unter einem Gegenbeweis versteht.

Beispiel 1:

Behauptung: Alle Zahlen von 1-10 sind Teiler von 60.

Da könntet ihr sofort den Gegenbeweis anführen: Nämlich, dass 7 kein Teiler von 60 ist und schon ist die Behauptung widerlegt und zwar mit einem Gegenbeweis. Dies ist ein ganz simples 1. Beispiel. Auf weiter Beispiele möchte ich hier aber verzichten, da es ein sehr einfaches Beweisverfahren ist.

3.1 Überblick: Der Gegenbeweis

Vereinfacht ausgedrückt sucht man einem Gegenbeweis ein Gegenbeispiel wie in Beispiel 1.
Natürlich ist dieses ein sehr einfaches Beispiel und eine sehr einfache Verallgemeinerung. Dieses reicht aber für das Wissen bis zur Oberstufe aus.

3.2 Weitere Aufgaben

Auf weitere Aufgaben verzichte ich hier, da es nicht der üblichste Beweis in der Mathematik ist.

---

4 Die vollständige Induktion

Beispiel 1:

Addiert man die ungeraden Zahlen von 1 angefangen bis zu einer bestimmten ungeraden Zahl, z.B. bis zu 7 oder bis zu 11, so erhält man eine Quadratzahl:

$$\begin{aligned} 1+3 &= 4 \ = 2^2 \\ 1+3+5 &= 9 \ = 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2 \\ 1+3+5+7+9+11 &= 36 = 6^2 \end{aligned}$$

Man versucht durch systematisches, schritt weises Vorgehen herauszufinden, ob das nur zufällig oder immer so ist:

1. Schritt: Im einfachsten Fall besteht die Summe der ungeraden Zahlen nur aus der Zahl 1.
1 ist aber Quadratzahl $1 = 1^2$.

2. Schritt: Wir addieren auf beiden Seiten die nächste ungerade Zahl 3
Aus $1 = 1^2$ folgt dann nacheinander:

$$\begin{aligned} 1+3 &= 1^2 + 3 \\ &= 1^2 + 2*1 + 1 \\ &= (1+1)^2 = 2^2 \end{aligned}$$

3. Schritt: Wir addieren auf beiden Seiten die nächste ungerade Zahl.
Aus $1+3 = 2^2$ folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1+3+5 &= 2^2+5 \\ &= 2^2+2\cdot 2+1 \\ &= (2+1)^2 = 3^2 \end{aligned}$$

usw.

So könnte man immer nach demselben Schema fortfahren. Nun versucht man dieses Schema allgemein zu beschreiben.

Man beachte: Die k-te gerade Zahl ist $2 \cdot k$, die k-te ungerade Zahl $2 \cdot k + 1$.

4.1 Allgemeine Beschreibung des Verfahrens:

Wenn für die Summe der k ersten ungeraden Zahlen $1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$ gilt, dann erhält man die Summe der (k+1)ten ungeraden Zahlen durch Addition der nächsten ungeraden Zahl 2k-1+2, also von 2k+1:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Fast alle Einzelschritte hätte man sich sparen können, wenn man nur diese letzte Überlegung und Rechnung durchgeführt hätte, da sie die Einzelberechnungen als Spezialfall enthalten.

Zu beweisen ist also die Gleichung $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
D.h. zu beweisen ist die Behauptung:
Die Summe der n ersten ungeraden Zahlen ist eine Quadratzahl, nämlich n^2.

1.Teil: Anfang der Überlegungen
Die Gleichung gilt nur für n=1, denn links vom Gleichheitszeichen steht nur die Zahl 1 und rechts 1^2.
2.Teil: Schluss von k auf k+1
Zu beweisen ist: Wenn die Gleichung n=k gilt, dann auch für n=k+1.
Für n=k lautet die Gleichung:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

Man addiert auf beiden Seiten die (k+1)-te ungerade Zahl 2(k+1)-1.

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] &= k^2 + [2(k + 1) - 1] \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

4.2 Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion:

Um die Gültigkeit der Gleichung g(n) für alle natürlichen Zahlen n zu beweisen, genügt der Beweis folgender Teile:
1. Teil: Induktionsanfang
Nachweis der Gültigkeit der Gleichung g(n) für n=1.
2. Teil: Induktionsschluss von k auf k+1
Nachweis von: Wenn g(k), dann g(k+1) für alle k.

Diejenigen, die Interesse an Herkunft und weiteren Beispielen zur vollständigen Induktion haben, verweise ich auf [4].

4.3 Weitere Aufgaben

Beweise folgende Behauptungen.

a) $A(n): 1 + 3 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

---

5 Wann welches Beweisverfahren?

In diesem Abschnitt will ich eine Behauptung mit zwei verschiedenen Beweistechniken (direkter Beweis, indirekter Beweis) beweisen und ihr werdet sehen, dass einige Beweise umständlicher sind als andere Beweistechniken. Entscheidet selbst, welches Beweisverfahren ihr für geeigneter haltet.

Nehmen wir das 2. Beispiel aus dem Abschnitt „2. Der indirekte Beweis“.

Behauptung: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

5.1 Beweis mit dem direkten Beweis

Es seien die ersten n Primzahlen bekannt. q sei $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot_n +1$
Nun weiß man aber nicht, ob q eine Primzahl ist, darum betrachtet man jetzt beide Möglichkeiten.

1. Fall: q ist eine Primzahl. → Somit hätte man eine weitere Primzahl gefunden.
2. Fall: q ist keine Primzahl. → Somit gäbe es einen echten Teiler von q.

5.2 Beweis mit dem indirekten Beweis

Wenn der Satz nicht gilt, dann gibt es nur endlich viele Primzahlen:
$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, $\ldots$, p_n, wobei p_n die größte Primzahl sei.
Man bildet das Produkt aller Primzahlen und addiert 1:

$$b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

Die entstehende Zahl b ist keine Primzahl, weil sie größer ist als die größte Primzahl p_n ist.
Sie muss sich daher aus den Primzahlen p_1, p_2, $\ldots$, p_n multiplikativ zusammensetzen.
b muss daher durch mindestens eine der Primzahlen p_1, p_2, $\ldots$, p_n teilbar sein.
Anderseits erkennt man bei Division von v durch eine Primzahl, dass b wegen der Addition von 1 durch keine Primzahl teilbar ist.
Das ist ein Widerspruch
Da es aber hier auch nur zwei Möglichkeiten gibt (Der Satz gilt oder er gilt nicht), ist der Satz richtig, da die Annahme zu einem Widerspruch führt.

Die Behauptung ist bewiesen

---

6 Beweise in der Mathematik

Beweise sind in der Mathematik unumgänglich. Ein Mathematiker, der die Beweise nicht beherrscht, ist kein Mathematiker. Eine Behauptung wird von Mathematikern nur geglaubt bzw. angenommen, wenn sie durch einen Beweis bewiesen wird. Andernfalls bleibt sie eine Behauptung. Deshalb ist es so wichtig diese vier Beweisverfahren zu beherrschen. Es bedarf einiger Übungen, damit man „perfekt“ im Beweisen wird.

Denn Reden lernt man durch Reden und Beweisen durch Beweisen.

Zum Schluss noch eine allgemeingültige Definition über den Beweis:

„Ein Beweis ist in der Mathematik der formal korrekte Nachweis, dass aus einem Satz von Aussagen eine weitere Aussage folgt.“

„Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage.“

„Der Beweis ist ein Götze, vor dem sich der Mathematiker foltert.“
Sir Arthur Eddington

---

7 Lösungen der Aufgaben

7.1 Lösungen zum Abschnitt 1.2

a) $S(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
Wir schreiben die Summe zwei Mal untereinander und addieren spaltenweise

$$\begin{array}{ccccccccccc} S(n) & = & 1 & + & 2 & +...+ & (n-1) & + & n \\ S(n) & = & n & + & (n-1) & +...+ & 2 & + & 1 \\ \hline S(n)+S(n) & = & (n+1) & + & (n+1) & +...+ & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Daraus kann man folgern:

$$2 \cdot S(n) = n(n+1)$$

Dividiert man beide Seiten durch 2, erhält man die Behauptung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot S(n) &= n(n+1) \\ S(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ q.e.d} \end{aligned}$$

7.2 Lösungen zum Abschnitt 2.2

Annahme: $\sqrt{n} = k$ ist ungerade.
Aufgrund von Beispiel 2 im Abschnitt „1 Der direkte Beweis“ folgt, dass $k^2 = n$ auch ungerade ist.
Somit liegt ein Widerspruch vor. Die Annahme ist falsch, die Behauptung ist richtig.

b) Die Wurzel aus einer ungeraden natürlichen Quadratzahl n ist ungerade.
Annahme: $\sqrt{n} = k$ ist gerade.
Aufgrund von Beispiel 1 im Abschnitt „1 Der direkte Beweis“ folgt, dass $k^2 = n$ auch gerade ist.
Somit liegt ein Widerspruch vor. Die Annahme ist falsch, die Behauptung ist richtig.

c) Die Zahl $\sqrt{2}$ ist rational.
Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational.
Somit kann man $\sqrt{2}$ als Bruch darstellen: $\sqrt{2} = \frac{n}{k}$,wobei n und k natürliche Zahlen und teilerfremd sind.
Nach Quadrieren folgt:

$$2 = \frac{n^2}{k^2} \Leftrightarrow n^2 = 2k^2$$

Daraus kann man wiederum folgern, dass n^2 eine gerade Zahl ist. Da die Wurzel aus einer geraden Quadratzahl auch gerade ist, ist n selbst gerade (Dies folgt aus der Lösung „7.2 Lösungen zum Abschnitt 2.2 a)“)

Damit muss $\frac{n}{2}$ eine natürliche Zahl sein.

$$2 = \frac{n^2}{n} = 2 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

Dieses zeigt, dass k^2 und somit k gerade natürliche Zahlen sind. n und k sind somit gerade und haben beide den Teiler 2. Damit sind n und k NICHT teilerfremd.
$\rightarrow$ Widerspruch.
Die Annahme ist falsch, die Behauptung ist richtig.

7.3 Lösungen zum Abschnitt 4.3

a) $A(n) : 1 + 3 + ... + (2n + 1) = (n + 1)^2$
$k \rightarrow k + 1$:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+\{2(k+1)-1\} = k^2+\{2(k+1)-1\} = k^2+2k+1 = (k+1)^2$$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$n = 1 : \quad 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

$k \rightarrow k + 1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot (k+1)(k+2)(2(k+1)+1) \end{aligned}$$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$$n = 1 : \quad 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$$

$k \rightarrow k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$$

---

8 Abschlussbemerkung

Ich hoffe ich konnte euch einen verständlichen, kurzen Überblick über die vier Beweisverfahren geben, die man zu Beginn der Oberstufe beherrschen sollte, und die man natürlich immer wieder, auch in der Oberstufe, benötigt.
Ich hoffe auch, dass ich schon fortgeschrittenere Studenten oder Mathematiker nicht zu sehr gelangweilt habe.

---

9 Literatur

[1] „Einführung in die Analysis 2" - Mathematik heute - Verlag: Schroedel und Schöningh
[2] „Einführung in die Analysis 1" - Mathematik heute - Verlag: Schroedel und Schöningh
[3] Wikipedia, die freie Enzyklopädie - hrefhttp://de.wikipedia.org/wiki/Beweishttp://de.wikipedia.org/
[4]http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/vi/vi.html - Autor: matroid

Ersterscheinung auf http://www.mathe1.de.

Euer
Florian Modler