

Das Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Einleitung

In der Mathematik gibt es im Prinzip drei grundlegende Beweismethoden, mit denen man versucht, die Gültigkeit von mathematischen Aussagen zu beweisen bzw. herzuleiten.

- Es gibt den direkten Beweis.
Ein Beispiel wäre der Beweis der Gültigkeit der dritten binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(a - b) \cdot (a + b) &= a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b \\ &= a^2 + ab - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

- Es gibt den indirekten Beweis, auch "Beweis durch Widerspruch."
Dabei nimmt man das Gegenteil an und führt dies zu einem Widerspruch.
Ein Beispiel dafür wäre z.B. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, also $\sqrt{2}$ ist kein Bruch.
Nimmt man das Gegenteil an, d.h. angenommen $\sqrt{2}$ wäre ein Bruch, also

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{mit } p, q \text{ teilerfremd,}$$

dann folgt durch Quadrieren

$$\begin{aligned}2 &= \frac{p^2}{q^2} && | \cdot q^2 \\ 2q^2 &= p^2 && \implies p \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar} \implies p = 2k \\ 2q^2 &= (2k)^2 \\ 2q^2 &= 4k^2 && | : 2 \\ q^2 &= 2k^2 && \implies q \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}\end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass p und q teilerfremd sind, d.h. keinen gemeinsamen Teiler haben.

Also muss die Annahme, dass $\sqrt{2}$ ein Bruch ist, verworfen werden.

Es folgt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Es gibt den Beweis durch vollständige Induktion.
Mit der vollständigen Induktion können Aussagen über die natürlichen Zahlen bewiesen werden, z.B.

$$A(n): n^2 - n \text{ ist gerade für beliebiges } n \in \mathbb{N}.$$

Diese Beweismethode soll nun näher behandelt werden.

Das Prinzip der vollständigen Induktion

Mit Hilfe der vollständigen Induktion lassen sich bestimmte mathematische Aussagen durch ein methodisches Vorgehen, das immer nach einem bestimmten Muster abläuft, beweisen. Dieses Verfahren ist auf den Zahlenbereich \mathbb{N} der natürlichen Zahlen beschränkt, denn die Eigenschaften der natürlichen Zahlen bilden die Grundlage, die dieses Verfahren erst ermöglicht. Denn das Beweisverfahren der Vollständigen Induktion beruht auf den Peano-Axiomen für die natürlichen Zahlen \mathbb{N} .

Diese Axiome (aus gr. *axioma* - „Grundwahrheiten“: das sind Annahmen, die man als wahr voraussetzt, die also nicht bewiesen werden müssen bzw. können) legte der italienische Mathematiker Guisepe Peano in dem nach ihm benannten

Peano-Axiomensystem (ca. 1889) der natürlichen Zahlen \mathbb{N} fest:

P1 : 1 ist eine natürliche Zahl.

P2 : Der Nachfolger jeder natürlichen Zahl ist auch eine natürliche Zahl.

P3 : 1 ist nicht Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

P4 : Zwei voneinander verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger. Oder:
Wenn auf zwei Zahlen dieselbe Zahl folgt, so sind sie identisch.

P5 : Wenn eine Teilmenge M der natürlichen Zahlen die Zahl 1 enthält, und mit jeder natürlichen Zahl auch deren Nachfolger, so enthält M jede natürliche Zahl (es gilt dann $M = \mathbb{N}$).

Die Menge der natürliche Zahlen enthält schlicht die Zahlen 1; 2; 3; \dots , also die positiven ganzen Zahlen. Oftmals wird die Menge der natürlichen Zahlen auch mit der Zahl 0 statt 1 definiert (siehe P1, P3 und P5). Ob man bei 0 oder bei 1 beginnt, hängt davon ab, ob 0 definitionsgemäß in \mathbb{N} liegen soll (dies kann unterschiedlich definiert werden).

Die Grundlage für die Beweismethode der vollständigen Induktion ist das letzte, recht komplex wirkende Axiom P5. Es wird auch „Axiom der vollständigen Induktion“ oder „Induktionsaxiom“ genannt, da es die Anwendbarkeit des Prinzips der vollständigen Induktion bei Aussagen über die natürlichen Zahlen ermöglicht.

Es ist sozusagen der Grundstein für dieses Prinzip.

Dies möchte ich ein wenig erläutern:

In der obigen Formulierung von P5 ist von einer Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ die Rede, die genau dann die gesamte Zahlenmenge \mathbb{N} umfasst, wenn in ihr die 1 sowie der Nachfolger jeder auch zu ihr gehörenden Zahl enthalten ist.

Um nun zu beweisen, dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt, setzt man M als die Menge aller natürlichen Zahlen n , für die $A(n)$ gilt und wendet auf diese Menge das Induktionsaxiom (P5) an.

Dies läuft folgendermaßen ab:

Man zeigt, dass $A(1)$ zutrifft, und damit $1 \in \mathbb{M}$ liegt, sowie dass aus $A(n)$ die Aussage $A(n+1)$ folgt, und damit, dass mit $n \in \mathbb{M}$ auch $n+1 \in \mathbb{M}$.

Damit gilt $\mathbb{M} = \mathbb{N}$, und die Aussage $A(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen gültig.

Für den Beweis, dass alle natürlichen Zahlen eine bestimmte Eigenschaft besitzen oder dass eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen wahr bzw. erfüllt ist, müssen also zwei Voraussetzungen erfüllt sein:

- zum Einen muss die Eigenschaft auf die Zahl 1 zutreffen / die Aussage $A(1)$ muss wahr sein. Das nennt man auch Induktionsanfang.
- zum Anderen muss die Eigenschaft auf jeden Nachfolger einer natürlichen Zahl zutreffen / die Aussage $A(n+1)$ für den Nachfolger einer natürlichen Zahl n muss wahr sein (das ist die Induktionsbehauptung) – unter der Annahme, dass die Eigenschaft für diese natürliche Zahl auch gültig ist / die Aussage $A(n)$ für die natürliche Zahl n wahr ist (das ist die Induktionsvoraussetzung).
Dies zusammen nennt man auch den Induktionsschritt- oder Schluss.

Eine Veranschaulichung dafür, dass beide Schritte der vollständigen Induktion zwingend notwendig sind, ist eine Reihe aufgestellter Domino Steine, bei denen eine Kettenreaktion ausgelöst wird. Wird ein Stein umgestoßen, was dem Induktionsanfang entspricht, und stehen die Steine so dicht, dass ein jeder Stein durch sein Umfallen den nachfolgenden Stein umstößt, so werden alle Steine umfallen (das entspricht dem Induktionsschritt).

Natürlich fällt überhaupt kein Stein um, wenn man erst gar keinen umstößt (dann ist der Induktionsanfang nicht erfüllt).

Auch wenn irgendein Stein die Kettenreaktion nicht weitergibt (also falls ein Stein den nachfolgenden Stein nicht umstößt), dann fallen nicht alle Steine um (dann gilt der Induktionsschritt nicht für beliebiges n).

Ablauf der vollständigen Induktion

Gegeben sei eine Aussage $A(n)$ über die natürlichen Zahlen ($n \in \mathbb{N}$).

Die Folge von Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung, Induktionsbehauptung und Induktionsschritt nennt man vollständige Induktion:

1. : Prüfen des **Induktionsanfangs**: $A(1)$
2. a: Formulieren der **Induktionsvoraussetzung**: es gelte $A(n)$
 - b: Formulieren der **Induktionsbehauptung**: zu zeigen ist $A(n + 1)$
 - c: Beweisen des **Induktionsschritts**: $A(n) \implies A(n + 1)$

Damit ist (nach P5) gezeigt, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, also dass sie auf alle natürlichen Zahlen zutrifft.

Beispiele für die Anwendung der vollständigen Induktion

Beispiel 1: Betrachte die Summe der ersten n ungeraden Zahlen.

Vorüberlegung: Durch einfaches Ausprobieren mit kleinen Zahlen ergibt sich folgendes Schema:

n	Summe $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$
1	$1 = 1^2$
2	$1 + 3 = 4 = 2^2$
3	$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
4	$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
⋮	
⋮	
n	$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) \stackrel{?}{=} n^2$

Die Beobachtung der Ergebnisse lässt eine Vermutung aufkommen:

die Zahlen sind den ersten Quadratzahlen n^2 jeweils gleich.

Diese Vermutung wurde induktiv gewonnen (und ist damit noch nicht bewiesen!).

Grundlage dafür war die Beobachtung der Ähnlichkeit (Analogie) zwischen der Summe der ersten n ungeraden Zahlen und den ersten Quadratzahlen n^2 .

Wir erhalten die

Aussage $A(n)$: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2 , bzw.:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Vermutung ist also, dass $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beweis:

1.: Induktionsanfang: Dieser Schritt ist eigentlich durch die Wertetabelle oben schon mehrmals ausgeführt worden, denn die Behauptung ist für $n = 1, 2, 3, 4$ bereits bestätigt:

$A(1)$ sowie $A(2), A(3), A(4)$ ist wahr.

2.: Induktionsschritt:

Es gelte die Induktionsvoraussetzung $A(n)$, also dass es eine natürliche Zahl n gibt mit

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Diese Aussage ist nicht bewiesen, sie ist nur die allgemeine Fassung des Ausdrucks im Induktionsanfang (dort wurden konkrete Zahlen eingesetzt) und wird im Induktionsschritt als Voraussetzung für die nachfolgend zu zeigende Induktionsbehauptung $A(n + 1)$ verwendet, in der einfach n mit $n + 1$ ersetzt wird (Klammern setzen, falls nötig!).

Zu zeigen ist

$$A(n + 1) : 1 + 3 + 5 + \dots + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$$

Nun folgt der eigentliche Beweis:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \dots + (2(n + 1) - 1) &= \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{= n^2 \text{ nach IV}} + (2(n + 1) - 1) \\ &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Im Induktionsanfang wurde die Gültigkeit der Aussage für $n = 1$ schon gezeigt. Im Induktionsschritt wurde bewiesen, dass die Aussage – unter Voraussetzung, dass sie für die beliebige Zahl n gilt – auch für deren Nachfolger $n + 1$ zutrifft.

Also ist die Aussage für alle natürlichen Zahlen wahr.

Sprich: $A(n)$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 2: Aussage $A(n)$: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$, und 0 ist durch 6 teilbar, d.h. $A(1)$ ist wahr.
- Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A(n) : \quad 3^n - 3 & \text{ ist durch 6 teilbar, bzw.} \\ 3^n - 3 & = 6k \end{aligned}$$

Zu zeigen ist die Induktionsbehauptung

$$A(n+1) : \quad 3^{n+1} - 3 \quad \text{ist ebenfalls durch 6 teilbar.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 3 & = 3 \cdot 3^n - 3 \\ & = 3 \cdot (3^n - 3 + 3) - 3 \\ & = 3 \cdot \underbrace{(3^n - 3)}_{=6k} + \underbrace{3 \cdot 3 - 3}_{=6} \\ & = 3 \cdot 6k + 6 \\ & = 6 \cdot (3k + 1) \end{aligned}$$

Daher ist $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar, also trifft $A(n+1)$ zu. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Ablauf der vollständigen Induktion (Handout)

Gegeben sei eine Aussage $A(n)$ über die natürlichen Zahlen ($n \in \mathbb{N}$).

Die Folge von Induktionsanfang, Induktionsvoraussetzung, Induktionsbehauptung und Induktionsschritt nennt man vollständige Induktion:

1. : Prüfen des **Induktionsanfangs**: $A(1)$
2. a: Formulieren der **Induktionsvoraussetzung**: es gelte $A(n)$
 - b: Formulieren der **Induktionsbehauptung**: $A(n+1)$
 - c: Beweisen des **Induktionsschritts**: $A(n) \implies A(n+1)$

Damit ist gezeigt, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, also auf alle natürlichen Zahlen zutrifft.

Beispiel: Aussage $A(n)$: $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

- Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt $3^1 - 3 = 3 - 3 = 0$ und 0 ist durch 6 teilbar, d.h. $A(1)$ ist wahr.
- Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Induktionsvoraussetzung

$$A(n) : \quad 3^n - 3 \text{ ist durch 6 teilbar, bzw.} \\ 3^n - 3 = 6k$$

Zu zeigen ist die Induktionsbehauptung

$$A(n+1) : \quad 3^{n+1} - 3 \text{ ist ebenfalls durch 6 teilbar.}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} - 3 &= 3 \cdot 3^n - 3 \\ &= 3 \cdot (3^n - 3 + 3) - 3 \\ &= 3 \cdot \underbrace{(3^n - 3)}_{=6k} + \underbrace{3 \cdot 3 - 3}_{=6} \\ &= 3 \cdot 6k + 6 \\ &= 6 \cdot (3k + 1) \end{aligned}$$

Daher ist $3^{n+1} - 3$ durch 6 teilbar, also trifft $A(n+1)$ zu. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist damit die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Anhang:

Plausibles Schließen: Induktion

Die Methode des plausiblen Schließens, besteht darin, dass man die aus Beobachtungen entstehende(n) Vermutung(en) zu einer neuen Aussage formt. Dies ist eigentlich die Arbeitsweise in allen Erfahrungswissenschaften (Naturwissenschaften, Psychologie; Gesellschaftsforschung), wo man aufgrund von Beobachtungen, die in irgendeiner Weise ähnlich/entsprechend sind, auf eine Gesetzmäßigkeit schließt.

Durch Induktion begründete Aussagen bergen meistens eine hohe Wahrscheinlichkeit für ihre Gültigkeit in sich. Ihnen kann aber keine vollständige Gewissheit zukommen, da sie noch nicht eindeutig bewiesen sind. Ein anschauliches Beispiel ist die lange als gültig angesehene Hypothese „Alle Schwäne sind weiß“, die durch Induktion entstanden war. Zahllose selbstständige Beobachtungen unterstützten und bekräftigten diese These, bis in Australien schwarze Schwäne entdeckt wurden und somit sämtliche Einzelfakten, die für diese These sprachen, auf einen Schlag bedeutungslos wurden.

Grob gesagt kann man die Induktion als Schluss vom Besonderen auf das Allgemeine bezeichnen, ein Gegensatz der Deduktion.

Demonstratives Schließen: Deduktion

Die eigentlich typische Methode ist das demonstrative Schließen, da man hier durch logische Schlussfolgerungen die Gültigkeit einer Aussage demonstriert (zeigt), d.h. man beweist anhand vorhandener Definitionen, Axiomen oder schon bewiesener Sätze. Dieses Verfahren nennt man auch Deduktion (Schlussfolgerung), weil man neue Aussagen aus schon vorhandenen, allgemeineren Aussagen herleitet. Grob gesagt ist es der Schluss vom Allgemeinen auf das Besondere.

Die moderne mathematische Logik und alle formalen Systeme enthalten nur deduktive Prinzipien. Auch die gesamte Mathematik liegt vollständig in deduktivem Aufbau vor und wird vorwiegend so gelehrt. Jedoch werden in der Entwicklung der Mathematik viele ihrer Erkenntnisse bzw. Vermutungen induktiv gewonnen.

Auch das Verfahren der vollständigen Induktion ist eigentlich kein induktives Prinzip, auch wenn der Name es nahe legt, sondern ein deduktives.

Die Bezeichnung „Induktion“ rührt nur vom Schluss von n auf $n + 1$ her.

Insgesamt lässt sich sagen, dass mit dieser Beweismethode eine Induktionsaussage deduktiv bewiesen wird: die Induktion wird (mathematisch) vervollständigt!