Funktionen der Abiturjahrgänge

Leistungskurs 1990 und 1991 aus Baden-Württemberg

mit Ableitungen und Stammfunktionen :

(Ableitungen und Stammfunktionen, wie in den Aufgaben verlangt)

Abi 1990 Analysis 1

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \frac{t^3x^3-8}{4tx^2} \\ &= \frac{t^3x^3}{4tx^2} - \frac{8}{4tx^2} \\ &= \frac{t^2}{4}\cdot x - \frac{2}{tx^2} = \frac{t^2}{4}\cdot x - \frac{2}{t}\cdot x^{-2} \quad ; \; x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \; ; \; t > 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: Hat eine gebrochenrationale Funktion einen Nenner der Form $c \cdot x^n$, wie hier (mit $c = 4t$ und $n = 2$), dann werden die Summanden im Zähler am besten einzeln durch den Nenner geteilt und gekürzt (das entspricht der Polynomdivision). Damit kann (und sollte) man die Quotientenregel umgehen:

$$\text{Ableitungen:} \quad \begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{t^2}{4} - \frac{2}{t}\cdot(-2)\cdot x^{-3} = \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t}\cdot x^{-3} = \frac{t^2}{4} + \frac{4}{tx^3} \\ f_t''(x) &= \frac{4}{t}\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -\frac{12}{t}\cdot x^{-4} = -\frac{12}{tx^4} \;\; (< 0) \end{aligned}$$

$$\text{Stammfunktion:} \quad \begin{aligned} F_t(x) &= \frac{t^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{2}{t}\cdot\frac{1}{-1}\cdot x^{-1} \\ &= \frac{t^2}{8}\cdot x^2 + \frac{2}{t}\cdot x^{-1} = \frac{t^2}{8}\cdot x^2 + \frac{2}{tx} \end{aligned}$$

Abi 1990 Analysis 2

$$f(x) = \frac{x}{3}\cdot\sqrt{9-x} \quad ; \; x \in D_f = \,]-\infty\,;9]$$

Bemerkung: Hier liegt ein Produkt vor. Es gilt $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$. Mit $u(x) = \frac{1}{3}\cdot x$ und $v(x) = \sqrt{9-x} = (9-x)^{\frac{1}{2}}$ erhält man $u'(x) = \frac{1}{3}$ und $v'(x) = \frac{1}{2}\cdot(9-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{9-x}}$ (Kettenregel).
Mit der Produktregel folgt

$$\text{Ableitung :} \quad \begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{9-x}\cdot\frac{2\cdot\sqrt{9-x}}{2\cdot\sqrt{9-x}} + \frac{1}{3}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{9-x}}\right) \\ &= \frac{2\cdot(9-x)-x}{6\cdot\sqrt{9-x}} = \frac{18-2x-x}{6\cdot\sqrt{9-x}} \\ &= \frac{6-x}{2\cdot\sqrt{9-x}} \quad ; \; x \in D_{f'} =]-\infty\,;9[\end{aligned}$$

Stammfunktion: nicht gefragt

Abi 1990 Analysis 3

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= x \cdot \ln(x) - tx \quad ; \quad x > 0 \ ; \ t \in \mathbb{R} \\
\text{Ableitungen}: \quad f_t'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - t \\
&= \ln(x) + 1 - t \\
f_t''(x) &= \frac{1}{x} \ (> 0)
\end{aligned}$$

Stammfunktion: Mit $f(x) = x \cdot (\ln(x) - t)$ und $u'(x) = x$; $u(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$ sowie $v(x) = \ln(x) - t$; $v'(x) = \frac{1}{x}$ gilt mit der Produktintegration $\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)] - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t)\right] - \int \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t)\right] - \int \left(\frac{1}{2} \cdot x\right) dx \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t)\right] - \left[\frac{1}{4} \cdot x^2\right] \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t) - \frac{1}{4} \cdot x^2\right] \\
&= \left[\frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot \Big(2\ln(x) - 2t - 1\Big)\right]
\end{aligned}$$

Abi 1991 Analysis 1

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= \frac{1}{t} \cdot x + \frac{t}{x-t} \quad = \quad \frac{1}{t} \cdot x + t \cdot (x-t)^{-1} \quad ; \quad x \neq t \ ; \ t > 0 \\
\text{Ableitungen}: \quad f_t'(x) &= \frac{1}{t} + t \cdot (-1) \cdot (x-t)^{-2} \quad \text{(Kettenregel)} \\
&= \frac{1}{t} - t \cdot (x-t)^{-2} \quad = \quad \frac{1}{t} - \frac{t}{(x-t)^2} \\
f_t''(x) &= -t \cdot (-2) \cdot (x-t)^{-3} \\
&= \frac{2t}{(x-t)^3} \ (\neq 0) \\
\text{Stammfunktion}: \quad F_t(x) &= \frac{1}{2t} \cdot x^2 + t \cdot \ln(x-t)
\end{aligned}$$

Abi 1991 Analysis 2

$$f_t(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Hier muss man die Quotientenregel $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ mit $u(x) = 4x$ und $v(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ anwenden. Dabei ist zu beachten, dass bei der Ableitung $v'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$ die Kettenregel nicht vergessen wird.

$$
\begin{aligned}
\textsf{Ableitungen}\ :\quad f_t'(x) &= \frac{4\cdot\sqrt{1+x^2}-4x\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{1+x^2}\\
&= \frac{4\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{4x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\\
&= \frac{\frac{4\cdot(1+x^2)-4x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4}{\sqrt{1+x^2}\cdot(1+x^2)}\\
\Longrightarrow\quad f_t'(x) &= \frac{4}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\cdot(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\\
f_t''(x) &= 4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x = -12x\cdot(1+x^2)^{-\frac{5}{2}}\\
\Longrightarrow\quad f_t''(x) &= \frac{-12x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die dritte Ableitung ist unnötig, da $f_t''(x)$ bei $x=0$ einen Vorzeichenwechsel hat; damit existiert immer ein Wendepunkt bei $x=0$.

$$\textsf{Stammfunktion:}\quad F_t(x) = \int\frac{4x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

Die Substitution $u(x)=1+x^2$ liefert $u'(x)=\frac{du}{dx}=2x \quad\Longrightarrow\quad dx=\frac{1}{2x}\cdot du$:

$$
\begin{aligned}
F_t(x) &= \int\frac{4x}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{2x}\,du = \int\frac{2}{\sqrt{u}}\,du = \int 2\cdot u^{-\frac{1}{2}}\,du\\
&= \left[2\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot u^{\frac{1}{2}}\right] = \left[4\cdot\sqrt{u}\right]\quad(\text{mit } u=1+x^2)\\
\Longrightarrow\quad F_t(x) &= 4\cdot\sqrt{1+x^2}+c
\end{aligned}
$$

Abi 1991 Analysis 3

$$
\begin{aligned}
f_t(x) &= \ln(2-t\cdot e^{-x})\ ;\ x\in D_t=\{x\in\mathbb{R}|x>\ln\frac{t}{2}\}\ ;\ t\neq 0\\
\textsf{Ableitungen}\ :\quad f_t'(x) &= \frac{1}{2-t\cdot e^{-x}}\cdot(-t\cdot(-1)\cdot e^{-x})\\
&= \frac{t\cdot e^{-x}}{2-t\cdot e^{-x}}\cdot\frac{e^x}{e^x} = \frac{t}{2\cdot e^x-t}\\
f_t''(x) &= \frac{0-t\cdot 2\cdot e^x}{(2\cdot e^x-t)^2} = -\frac{2te^x}{(2\cdot e^x-t)^2}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Die dritte Ableitung ist unnötig, da $f_t''(x)<0$ für alle $x\in D_t$.

$$t=2:\quad f_2(x) = \ln(2-2e^{-x})\ ;\ f_2'(x) = \frac{1}{e^x-1}\ ;\ f_2''(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$$

Stammfunktion: nicht gefragt

Abi 1992 Analysis 1

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2} \quad ; \quad x \neq 1$$

Bemerkung: Hier liegt ein Quotient vor. Es gilt $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.
Mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = 3(x-1)^2$ erhält man $u'(x) = 3x^2$ und $v'(x) = 3\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1$ sowie $[v(x)]^2 = 9(x-1)^4$ und somit:

Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{3\cdot x^2\cdot 3(x-1)^2 - x^3\cdot 3\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{9(x-1)^4} \\
&= \frac{3\cdot(x-1)\cdot[3\cdot x^2\cdot(x-1)-2x^3]}{9(x-1)^4} \\
&= \frac{3\cdot x^3 - 3\cdot x^2 - 2x^3}{3(x-1)^3} \\
\Longrightarrow \quad f'(x) &= \frac{x^3-3x^2}{3(x-1)^3} \\
f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)\cdot 3(x-1)^3 - (x^3-3x^2)\cdot 3\cdot 3\cdot(x-1)^2\cdot 1}{9(x-1)^6} \\
&= \frac{3(x-1)^2\cdot[(3x^2-6x)\cdot(x-1)-3(x^3-3x^2)]}{9(x-1)^6} \\
&= \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{3(x-1)^4} \\
&= \frac{6x}{3(x-1)^4} \\
\Longrightarrow \quad f''(x) &= \frac{2x}{(x-1)^4} \\
f'''(x) &= \frac{2\cdot(x-1)^4 - 2x\cdot 4\cdot(x-1)^3\cdot 1}{(x-1)^8} \\
&= \frac{(x-1)^3\cdot[2\cdot(x-1)-8x]}{(x-1)^8} \\
&= \frac{2x-2-8x}{(x-1)^5} \\
\Longrightarrow \quad f'''(x) &= \frac{-6x-2}{(x-1)^5}
\end{aligned}$$

Stammfunktion: $F(x) = \int \frac{x^3}{3(x-1)^2}\,dx$

Mit der gebrochenrationalen Funktion f muss erst eine Polynomdivision durchgeführt werden, um eine Stammfunktion ermitteln zu können. Mit dem Nenner $3(x-1)^2 = 3(x^2-2x+1) = 3x^2-6x+3$ erhält man

$$\begin{array}{rl}
f(x) = x^3 & :(3x^2-6x+3) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3x-2}{3(x-1)^2} \\
-(x^3-2x^2+x) & \\
\hline
2x^2 - x & \\
-(2x^2-4x+2) & \\
\hline
3x - 2 &
\end{array}$$

Damit muss nur noch die Stammfunktion von $\frac{3x-2}{3(x-1)^2}$ ermittelt werden:

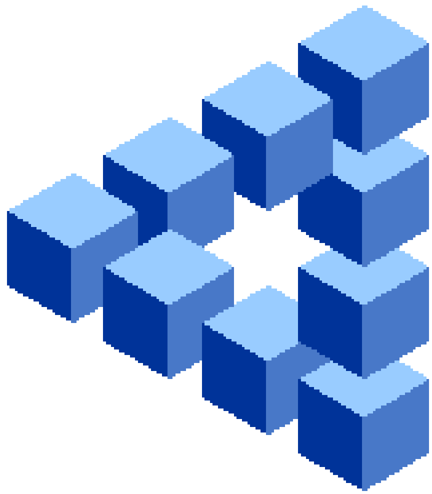
$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x-2}{3(x-1)^2}\,dx &= \int \frac{3x-3+1}{3(x-1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{3(x-1)+1}{3(x-1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3(x-1)^2}\,dx \\
&= [\,\ln|x-1|\,] + \int \frac{1}{3}\cdot(x-1)^{-2}\,dx \\
&= [\,\ln|x-1| + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{-1}\cdot(x-1)^{-1}\,] \\
\Longrightarrow \quad \int \frac{3x-2}{3(x-1)^2}\,dx &= \left[\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)}\right] \text{ bzw.} \\
\Longrightarrow \quad F(x) = \int f(x)\,dx &= \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3x-2}{3(x-1)^2}\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)}\right]
\end{aligned}
$$

Baustelle: letzte Änderung: 23.11.2002.
Diese Seiten werden fortgesetzt, falls Interesse besteht.
Wünsche und Fehler bitte an

rainer.mueller@emath.de

"Why is it important for today's kids to learn algebra? Because *I* had to learn this junk in school and now it's *your* turn, that's why!"

eMath



Abituraufgaben & Lösungen   Abi Know-How Mathematik

Mathematik - Tools   Mathe - Board