Abiturprüfung Baden-Württemberg 1986

Leistungskurs Mathematik - Analysis 2

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuche K_t auf Asymptoten, Schnittpunkte mit der x-Achse sowie auf Hoch- und Tiefpunkte.
Zeichne K_1 für $-4 \leq x \leq 2,2$ (Längeneinheit 2cm).
Die Parallele zur x-Achse durch den Hochpunkt und die Parallele zur y-Achse durch den Tiefpunkt von K_t schneiden sich im Punkt Q_t.
Welche Kurve bilden diese Punkte Q_t, wenn t alle zugelassenen Werte annimmt ? (9 VP)

b) Die Normale zu K_1 im Ursprung schneidet K_1 in einem weiteren Punkt S.
Berechne die Abszisse von S mit dem Newtonschen Näherungsverfahren (das Verfahren ist abzubrechen, wenn sich die 4. Dezimale nicht mehr ändert); gib dann das Ergebnis auf 3 Dezimalen gerundet an. (8 VP)

c) Die Kurve K_t, die x-Achse und die Gerade $x = u$ mit $u < 0$ begrenzen im 2. Feld eine Fläche mit dem Inhalt $A_t(u)$.
Berechne $A_t(u)$ und $\lim\limits_{u \to -\infty} A_t(u)$. (7 VP)

d) Für jedes $t > 0$ ist außer K_t noch die Parabel P_t gegeben durch

$$y = t\left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)$$

Bestimme diejenigen Werte von t, für die sich P_t und K_t in genau zwei Punkten schneiden. (6 VP)

Lösung

Abiturprüfung Baden-Württemberg 1986

Leistungskurs Mathematik - Analysis 2

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx}; \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Asymptoten

Senkrechte Asymptoten

Es gibt keine senkrechten Asymptoten, da $D = \mathbb{R}$.

Waagrechte Asymptoten

Hier ist das Verhalten von $f_t(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ zu untersuchen:

$$x \longrightarrow +\infty : \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - \frac{2x}{t} = x \cdot \left(x - \frac{2}{t}\right) & \longrightarrow & \infty \\ e^{tx} & \longrightarrow & \infty \quad (\text{wegen } t > 0) \end{array} \right. \implies f_t(x) \longrightarrow \infty$$

Für $x \longrightarrow +\infty$ erhält man also keine Asymptote.

$$x \longrightarrow -\infty : \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 - \frac{2x}{t} = \underbrace{x}_{\longrightarrow -\infty} \cdot \underbrace{\left(x - \frac{2}{t}\right)}_{\longrightarrow -\infty} & \longrightarrow & \infty \\ e^{tx} & \longrightarrow & 0 \quad (\text{wegen } t > 0) \end{array} \right\} \implies f_t(x) \longrightarrow 0$$

Erklärung: Es gilt zwar $x^2 - \frac{2x}{t} \longrightarrow \infty$, aber auch $e^{tx} \longrightarrow 0$.
Da die e-Funktion "stärker" gegen null geht, als jede Potenzfunktion, folgt $f_t(x) \longrightarrow 0$.
Die x-Achse $y = 0$ ist daher waagrechte Asymptote.

Das wird z.B. mit der Regel von de l'Hopital nachgewiesen:
Umformen liefert $f_t(x) = \frac{x^2 - \frac{2x}{t}}{e^{-tx}}$, wobei $(x^2 - \frac{2x}{t}) \longrightarrow \infty$ und $e^{-tx} \longrightarrow \infty$ (für $x \longrightarrow -\infty$).
Daher darf man Zähler und Nenner getrennt ableiten und danach den Limes bilden (beachte: beim Ableiten von $a \cdot e^{kx}$ erhält man $ak \cdot e^{kx}$):

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^2 - \frac{2x}{t}}{e^{-tx}} \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{2}{t}}{-te^{-tx}}$$

Jetzt geht der Zähler gegen minus unendlich, der Nenner geht (wegen $t > 0$) ebenfalls gegen minus unendlich; daher darf wieder die Regel von de l'Hopital angewendet werden. Man erhält schließlich

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{2}{t}}{-te^{-tx}} \overset{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2}{t^2 e^{-tx}} = 0$$

$y = 0$ ist also waagrechte Asymptote und $f_t(x)$ nähert sich ihr von oben an, da $2 > 0$ und $t^2 e^{-tx} > 0$ (bzw. da $f_t(x) = x \cdot (x - \frac{2}{t}) \cdot e^{tx} > 0$ für $x < 0$).

Schnittpunkte mit der x-Achse

$$\begin{aligned} f_t(x) &= 0 \\ \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)e^{tx} &= 0 \\ x\left(x - \frac{2}{t}\right)e^{tx} &= 0 \quad \text{; wegen } e^{tx} \neq 0 \text{ folgt} \\ x\left(x - \frac{2}{t}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Daher erhält man $x_1 = 0$ oder $x - \frac{2}{t} = 0 \overset{|+\frac{2}{t}}{\Longrightarrow} x_2 = \frac{2}{t}$:

$$N_1(0|0) \quad ; \quad N_2\left(\frac{2}{t}\middle|0\right)$$

Extrema

Dazu benötigt man die

Ableitungen mit der Produkt und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_t(x) &= \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)e^{tx} \\ f_t'(x) &= \left(2x - \frac{2}{t}\right)e^{tx} + \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)\cdot t \cdot e^{tx} \\ &= e^{tx}\left(2x - \frac{2}{t} + tx^2 - 2x\right) \\ &= e^{tx}\left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) \\ f_t''(x) &= t \cdot e^{tx}\left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) + e^{tx}\cdot 2tx \\ &= e^{tx}\left(t^2x^2 + 2tx - 2\right) \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ e^{tx}\left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) &= 0 \quad \text{; wegen } e^{tx} \neq 0 \text{ folgt} \\ tx^2 - \frac{2}{t} &= 0 \quad \left| + \frac{2}{t}\right. \\ tx^2 &= \frac{2}{t} \quad \left| \cdot \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)\right. \\ x^2 &= \frac{2}{t^2} \quad |\sqrt{\cdot} \quad \text{: erlaubt wegen } \frac{2}{t^2} > 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t} \quad ; \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t}$$

Hinreichende Bedingung ($f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$)

Da für die gefundenen Stellen schon $f_t'(x_{1;2}) = 0$ gilt, muss nur noch $f_t''(x_{1;2}) \neq 0$ überprüft werden:

Wegen $e^{tx} > 0$ hat $f_t''(x) = e^{tx}\left(t^2x^2 + 2tx - 2\right)$ das gleiche Vorzeichen wie $(t^2x^2 + 2tx - 2)$:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t}: \qquad t^2\frac{2}{t^2} + 2t(-\frac{\sqrt{2}}{t}) - 2 = -2\sqrt{2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad f_t''(x_1) < 0$$

Bei $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t}$ ist also ein Hochpunkt.

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t}: \qquad t^2\frac{2}{t^2} + 2t\frac{\sqrt{2}}{t} - 2 = 2\sqrt{2} > 0 \quad \Longrightarrow \quad f_t''(x_2) > 0$$

Bei $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t}$ ist also ein Tiefpunkt.

Funktionswerte

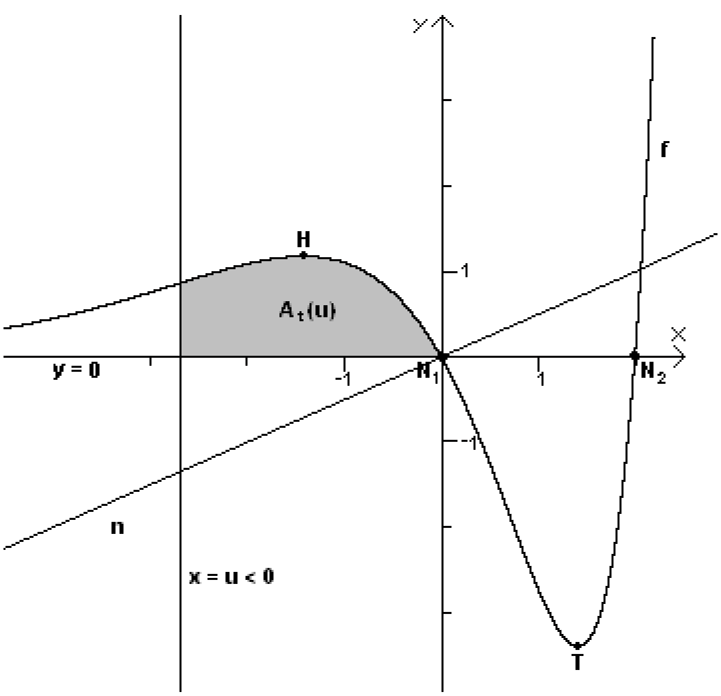
$$f_t(x_1) = f_t(-\tfrac{\sqrt{2}}{t}) = \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{t}\right)\right)\cdot e^{t(-\frac{\sqrt{2}}{t})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{t^2}\cdot e^{-\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt } H\left(-\frac{\sqrt{2}}{t} \;\middle|\; \frac{2+2\sqrt{2}}{t^2e^{\sqrt{2}}}\right)$$

$$f_t(x_2) = f_t(\tfrac{\sqrt{2}}{t}) = \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t}\cdot\frac{\sqrt{2}}{t}\right)\cdot e^{t\frac{\sqrt{2}}{t}} = \frac{2-2\sqrt{2}}{t^2}\cdot e^{\sqrt{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt } T\left(\frac{\sqrt{2}}{t} \;\middle|\; \frac{2-2\sqrt{2}}{t^2}e^{\sqrt{2}}\right)$$

Zeichnung ($t = 1$)



Kurve der Punkte Q_t (Ortskurve)

Die Parallele zur x-Achse durch H hat die Gleichung $y = \frac{2+2\sqrt{2}}{t^2 e^{\sqrt{2}}}$.
Die Parallele zur y-Achse durch T hat die Gleichung $x = \frac{\sqrt{2}}{t}$.
Deswegen hat Q_t dieselben Koordinaten: $Q_t(\frac{\sqrt{2}}{t}|\frac{2+2\sqrt{2}}{t^2 e^{\sqrt{2}}})$.

Die Kurve, welche die Punkte Q_t bilden, nennt man auch "Ortskurve". Um sie zu erhalten, löst man x nach t auf und setzt das dann in y ein:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{t} \quad \overset{|\cdot \frac{t}{x}}{\Longrightarrow} \quad t = \frac{\sqrt{2}}{x} \quad \text{; in } y \text{ eingesetzt ergibt das} \\ y &= \frac{2+2\sqrt{2}}{\frac{2}{x^2}\cdot e^{\sqrt{2}}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{2\cdot(1+\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\cdot x^2 \end{aligned}$$

Wegen $t > 0$ gilt auch $x = \frac{\sqrt{2}}{t} > 0$.
Also liegen die Punkte Q_t auf der Parabel $y = \frac{1+\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\cdot x^2$ mit $x > 0$.

b) Normale von K_1 im Ursprung

Setzt man $t = 1$ in f_t und in f_t' aus Teilaufgabe a) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x^2-2x)e^x \\ f_1'(x) &= (x^2-2)e^x \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ergibt sich die Tangentensteigung $m_t = f_1'(0) = -2$.
Die Normale im Ursprung $O(0|0)$ ist senkrecht zur Tangenten und hat als Steigung m_n den negativen Kehrwert von m_t:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Da die Normale eine Ursprungsgerade ist, hat sie also die Gleichung

$$n: \quad y = \frac{1}{2}\cdot x$$

Der Schnitt der Normalen n mit f_1 liefert durch Gleichsetzen die Gleichung

$$\begin{aligned} (x^2-2x)\cdot e^x &= \frac{1}{2}\cdot x \quad |\cdot 2 \\ (2x^2-4x)e^x &= x \quad |-x \\ 2(x^2-2x)e^x - x &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt wird im Hinblick auf das Newton-Verfahren die Funktion

$$g(x) := 2(x^2-2x)e^x - x$$

definiert und abgeleitet (beachte dabei, dass gilt: $g(x) = 2\cdot f_1(x) - x$):

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\cdot f_1'(x) - 1 \\ &= 2\cdot(x^2-2)e^x - 1 \end{aligned}$$

Aus der Zeichnung ermittelt man eine Näherungslösung x_0, indem man die Normale im Ursprung einzeichnet und in etwa die x-Koordinate des (vom Ursprung $O(0|0)$ verschiedenen)

Schnittpunktes abliest; ein möglicher Wert ist etwa $x_0 = 2$.

Rekursive Gleichung für das Newtonverfahren

Die rekursive Gleichung für das Newtonsche Näherungsverfahren für $g(x) = 0$
(das heisst: einer approximativen Lösung von $g(x) = 0$) lautet

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Setzt man g und g' hier ein, dann erhält man

$$x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{2 \cdot (x_n^2 - 2x_n) \cdot e^{x_n} - x_n}{2 \cdot (x_n^2 - 2) \cdot e^{x_n} - 1}$$

Diese Gleichung liefert mit dem Startwert $x_0 = 2$ nacheinander die Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{2 \cdot (2^2 - 2 \cdot 2) \cdot e^2 - 2}{2 \cdot (2^2 - 2) \cdot e^2 - 1} \\ &= 2 - \frac{-2}{4 \cdot e^2 - 1} = 2 + \frac{2}{4 \cdot e^2 - 1} \\ \Longrightarrow \quad x_1 &\approx 2,07003727 \\ x_2 &\approx 2,063565521 \\ x_3 &\approx 2,063504077 \end{aligned}$$

Von x_2 auf x_3 hat sich die vierte Dezimale nicht mehr verändert.
Das auf 3 Stellen gerundete Ergebnis lautet damit

$$z = 2,064$$

c) Fläche $A_t(u)$ im 2. Feld (uneigentliches Integral)

Für alle $x < 0$ gilt $f_t(x) > 0$: f_t liegt im 2. Feld über der x-Achse.
Daher gilt für die gesuchte Fläche (mit $u < 0$)

$$\begin{aligned} A_t(u) &= \int_u^0 f_t(x)\,dx \\ &= \int_u^0 \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot e^{tx}\,dx \end{aligned}$$

Hier ist es am besten, die Produktintegration anzuwenden, denn es liegt ja auch ein Produkt vor (beachte dabei: eine Stammfunktion von $a \cdot e^{kx}$ ist $\frac{a}{k} \cdot e^{kx}$):

$$\begin{aligned} u(x) = x^2 - \frac{2x}{t} \quad &\text{und} \quad v'(x) = e^{tx} \quad \text{liefert} \\ u'(x) = 2x - \frac{2}{t} \quad &\text{und} \quad v(x) = \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \end{aligned}$$

Wegen $\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx \; = \; [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx$ folgt dann

$$A_t(u) = \left[\left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx}\right]_u^0 - \int_u^0 \left(2x - \frac{2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx}\,dx$$

Jetzt wird eine weitere Produktintegration benötigt:

$$\begin{array}{lll} u(x) = 2x - \frac{2}{t} & \text{und} & v'(x) = \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \quad \text{liefert} \\ u'(x) = 2 & \text{und} & v(x) = \frac{1}{t^2} \cdot e^{tx} \end{array}$$

Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} A_t(u) &= \left[\left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx}\right]_u^0 - \left(\left[\left(2x - \frac{2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{tx}\right]_u^0 - \int_u^0 \frac{2}{t^2} \cdot e^{tx}\, dx\right) \\ &= \left[\frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) - \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left(\frac{2x}{t} - \frac{2}{t^2}\right)\right]_u^0 + \left[\frac{2}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx}\right]_u^0 \\ &= \left[\frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left(x^2 - \frac{2x}{t} - \frac{2x}{t} + \frac{2}{t^2}\right) + \frac{2}{t^3} \cdot e^{tx}\right]_u^0 \\ &= \left[\frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left(x^2 - \frac{4x}{t} + \frac{4}{t^2}\right)\right]_u^0 \\ &= \frac{1}{t} \cdot 1 \cdot \left(0 - 0 + \frac{4}{t^2}\right) - \left[\frac{1}{t} \cdot e^{tu} \cdot \left(u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2}\right)\right] \\ \Longrightarrow \quad A_t(u) &= \frac{4}{t^3} - \frac{1}{t} \cdot e^{tu} \cdot \left(u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2}\right) \end{aligned}$$

Der Term $\frac{1}{t} \cdot e^{tu} \left(u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2}\right)$ konvergiert mit $u \to -\infty$ gegen null, da die e-Funktion „stärker" gegen null geht, als jede Potenzfunktion. Daher gilt

$$\lim_{u \longrightarrow -\infty} A_t(u) = \frac{4}{t^3}$$

d) Schnitt von K_t und P_t für $t > 0$

Dazu werden $f_t(x)$ und $y = t \cdot (x^2 - \frac{2x}{t})$ gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot e^{tx} &= t \cdot \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \qquad \Big| - t \cdot \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \\ \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot e^{tx} - t \cdot \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) &= 0 \quad \left[\text{jetzt } \left(x^2 - \tfrac{2x}{t}\right) \text{ ausklammern}\right] \\ \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)\left(e^{tx} - t\right) &= 0 \\ x\left(x - \frac{2}{t}\right)\left(e^{tx} - t\right) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert genau die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2}{t}$
sowie die Lösung der Gleichung $e^{tx} - t = 0$.
Diese letzte Gleichung liefert $e^{tx} = t$; wegen $t > 0$ darf man logarithmisieren:

$$t \cdot x = \ln(t) \quad \overset{|:t \neq 0}{\Longrightarrow} \quad x_3 = \frac{\ln(t)}{t}$$

Die Lösungen x_1 und x_2 sind verschieden; man muss sich also darum kümmern, dass die dritte Lösung x_3 mit einem der Werte x_1 oder x_2 zusammenfällt, damit es genau zwei Schnittpunkte gibt:

1. Fall:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 \\ \frac{ln(t)}{t} &= 0 \quad | \cdot t \neq 0 \\ ln(t) &= 0 \quad |e^{(\cdot)} \\ t &= 1 \end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 \\ \frac{ln(t)}{t} &= \frac{2}{t} \quad | \cdot t \neq 0 \\ ln(t) &= 2 \quad |e^{(\cdot)} \\ t &= e^2 \end{aligned}$$

D.h. P_t und K_t schneiden sich genau dann in genau zwei Punkten,
wenn $t = 1$ $(x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2)$ oder wenn $t = e^2$ $(x_1 = 0\ ;\ x_2 = \frac{2}{e^2})$ ist.

Ergänzungen: $x \in \mathbb{R}\ ;\ y > 0$

$$\begin{array}{rrcl} n \in \mathbb{Z}\ ,\ t > 0: & x \longrightarrow +\infty & \Longrightarrow & x^n \cdot e^{tx} \longrightarrow +\infty \\ & x \longrightarrow -\infty & \Longrightarrow & x^n \cdot e^{tx} \longrightarrow 0 \\ & e^x = y > 0 & \Longleftrightarrow & x = \ln(y) \\ & e^0 = 1\ ;\ e^1 = e & ; & \ln(1) = 0\ ;\ \ln(e) = 1 \\ a, b > 0: & \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) & ; & \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ r \in \mathbb{R}: & \ln(a^r) = r \cdot \ln(a) & ; & \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \end{array}$$