Abiturprüfung Baden-Württemberg 1999

Grundkurs Mathematik - Analysis 1

Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \frac{1}{3t}x(x-3t)^2; \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_2 auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K_2 für $-0,5 \leq x \leq 8$ (Längeneinheit 1cm).
Berechnen Sie den Inhalt der von K_2 und der x-Achse eingeschlossenen Fläche. (9 VP)

b) Die Gerade $y = -2$ und K_2 schneiden sich in einem Punkt S.
Bestimmen Sie mit dem Newtonschen Näherungsverfahren einen Näherungswert für die x-Koordinate von S. (Das Verfahren ist abzubrechen, wenn sich die ersten drei Stellen hinter dem Komma erstmals nicht ändern). (6 VP)

c) Die Ursprungsgerade g_t geht durch den Wendepunkt W_t von K_t.
Untersuchen Sie, ob es ein t gibt, für das g_t die Normale von K_t in W_t ist. (7 VP)

d) Es sei h eine beliebige ganzrationale Funktion 3. Grades mit dem Schaubild C.
Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten des Funktionsterms von h erfüllen, damit C keine Extrempunkte hat?
Wieviele gemeinsame Punkte mit der x-Achse hat C in diesem Fall?
Begründen Sie ihre Antwort. (8 VP)

Lösung

Abiturprüfung Baden-Württemberg 1999

Grundkurs Mathematik - Analysis 1

a) Gegeben ist für $t > 0$ die Funktion $f_t(x) = \frac{1}{3t}x(x-3t)^2 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

Gemeinsame Punkte von K_2 mit der x-Achse (Nullstellen)

Für K_2 erhält man mit $t = 2$ die Funktionsgleichung $f_2(x) = \frac{1}{6}x(x-6)^2$.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 \\ \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-6)^2 &= 0 \quad | \cdot 6 \\ x \cdot (x-6)^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad (x-6)^2 = 0 \overset{|\sqrt{(\cdot)}}{\Longrightarrow} x - 6 = 0 \overset{|+6}{\Longrightarrow} x_2 = 6$$

Ergebnis: Für $t = 2$ hat die Funktion f_2 die Nullstellen $N_1(0|0)$ und $N_2(6|0)$.

Ableitungen (für Extrema und Wendepunkte)

Die Funktion f_2 sollte vor dem Ableiten erst umgeformt werden, damit man nicht die Produktregel anwenden muss (im Folgenden wird dann diese Darstellung von f_2 verwendet):

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{6} \cdot x \cdot (x-6)^2 && \text{; erst das Binom ausrechnen:} \\ &= \frac{1}{6}x \cdot (x^2 - 12x + 36) && \text{; jetzt } x \text{ in die Klammer hineinmultiplizieren:} \\ &= \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 12x^2 + 36x) && \text{; der Faktor } \tfrac{1}{6} \text{ bleibt beim Ableiten erhalten)} \\ f_2'(x) &= \frac{1}{6} \cdot (3x^2 - 24x + 36) \\ f_2''(x) &= \frac{1}{6} \cdot (6x - 24) \\ f_2'''(x) &= \frac{1}{6} \cdot 6 = 1 \end{aligned}$$

Extrema (Hoch- und Tiefpunkte)

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_2'(x) &= 0 \\ \frac{1}{6} \cdot (3x^2 - 24x + 36) &= 0 \quad | \cdot 6 \\ 3x^2 - 24x + 36 &= 0 \quad | : 3 \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 \quad \text{; mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gilt:} \\ x_{1;2} &= \frac{8 \pm \overbrace{\sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}^{=\sqrt{64-48}=\sqrt{16}=4}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1;\,2} &= \frac{8 \pm 4}{2} \\ \Longrightarrow \quad x_{1;\,2} &= 4 \pm 2 \\ x_1 = 2 \quad &; \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung $\left(f_2'(x) = 0 \text{ und } f_2''(x) \neq 0\right)$

Da für die gefundenen Stellen schon $f_2'(x_{1;2}) = 0$ gilt, muss nur noch $f_2''(x_{1;2}) \neq 0$ überprüft werden:

$$\begin{aligned} f_2''(2) &= \frac{1}{6}(6 \cdot 2 - 24) = \frac{1}{6}(12 - 24) = -2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt bei } x_1 = 2 \\ f_2''(6) &= \frac{1}{6}(6 \cdot 6 - 24) = \frac{1}{6}(36 - 24) = +2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt bei } x_2 = 6 \end{aligned}$$

Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f_2(2) &= \frac{1}{6}(2^3 - 12 \cdot 4 + 36 \cdot 2) = \frac{1}{6}(\overbrace{8 - 48 + 72}^{=32}) = \frac{1}{6} \cdot 32 = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \\ &\Rightarrow \text{ Hochpunkt bei } H(2|\tfrac{16}{3}) \\ f_2(6) &= 0 \quad (\text{siehe Nullstelle } N_2) \\ &\Rightarrow \text{ Tiefpunkt bei } T(6|0) = N_2 \end{aligned}$$

Wendepunkt

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= 0 \\ \frac{1}{6} \cdot (6x - 24) &= 0 \qquad ; \text{ jetzt ausmultiplizieren:} \\ x - 4 &= 0 \qquad | + 4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung $\left(f_2''(x) = 0 \text{ und } f_2'''(x) \neq 0\right)$

Da für die gefundene Stelle schon $f_2''(x) = 0$ gilt, muss nur noch $f_2'''(x) \neq 0$ überprüft werden:

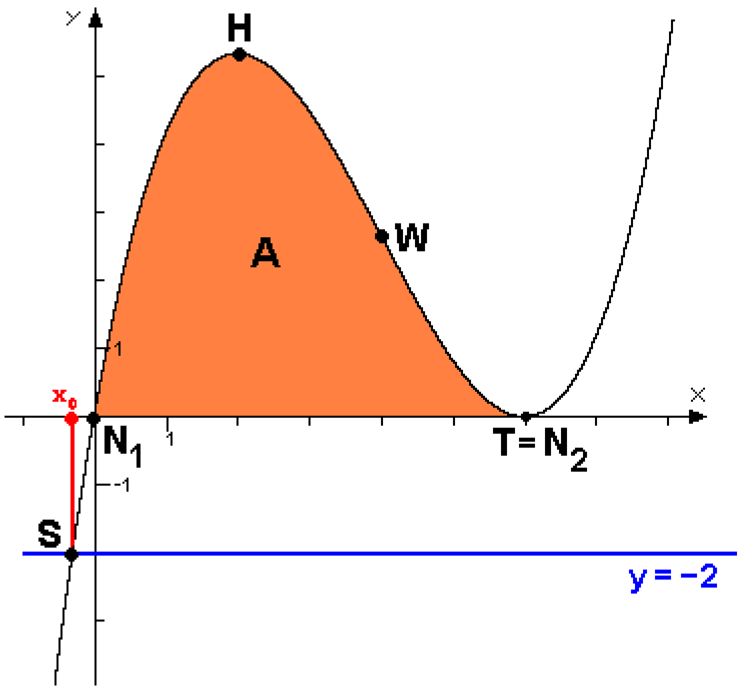
$$f_2'''(4) = 1 \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Wendepunkt bei } x = 4$$

Funktionswert:

$$\begin{aligned} f_2(4) &= \frac{1}{6} \cdot (4^3 - 12 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4) = \frac{1}{6} \cdot (\overbrace{64 - 12 \cdot 16 + 144}^{=16}) = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow \text{ Wendepunkt bei } \quad W\left(4|\tfrac{8}{3}\right) \end{aligned}$$

Bemerkung: Wenn bei einer ganzrationalen Funktion 3.Grades der Hochpunkt H und der Tiefpunkt T existieren, dann ist der (immer existierende) Wendepunkt W
stets Mittelpunkt von H und T: f ist sogar punktsymmetrisch zum Wendepunkt W.
Falls also der berechnete Punkt W nicht Mittelpunkt von H und T ist,
dann hat man sich verrechnet:
man sollte dann unbedingt nach dem Fehler suchen,
da die Ergebnisse von Aufgabenteil a)
oft in den anderen Aufgabenteilen verwendet/benötigt werden (richtige Zeichnung!).

Zeichnung von K_2



Flächeninhalt

In der Skizze oben erkennt man die (eingefärbte) Fläche, die mit der x-Achse eingeschlossen wird:

Diese Fläche reicht vom Ursprung ($x = 0$) bis zur Nullstelle $x = 6$.
Da f_2 für $0 < x < 6$ über der x-Achse verläuft, gilt für die gesuchte Fläche

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^6 f_2(x)\,dx \\
&= \int_0^6 \frac{1}{6}\cdot(x^3 - 12x^2 + 36x)\,dx \\
&= \left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{12}{3}x^3 + \frac{36}{2}x^2\right)\right]_0^6 \\
&= \left[\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}x^4 - 4x^3 + 18x^2\right)\right]_0^6 \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 6^4 - 4\cdot 6^3 + 18\cdot 6^2\right) - \frac{1}{6}\cdot(0 - 0 + 0) \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1296}{4} - 864 + 648\right) \\
&= \frac{1}{6}\cdot(324 - 864 + 648) \\
&= \frac{1}{6}\cdot 108 \\
\Longrightarrow \quad A &= 18
\end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche beträgt also $A = 18$ (Flächeneinheiten).

b) Schnitt der Gerade $y = -2$ mit K_2

Dazu wird $f_2(x)$ mit $y = -2$ gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} f_2(x) &= -2 \\ \frac{1}{6}\cdot(x^3 - 12x^2 + 36x) &= -2 \quad |\cdot 6 \\ x^3 - 12x^2 + 36x &= -12 \quad |+12 \\ x^3 - 12x^2 + 36x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Es ist also die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + 12 \qquad (*)$$

gesucht.

1.Möglichkeit: Newtonsches Näherungsverfahren (auch Tangentenverfahren)

Das Newtonsche Näherungsverfahren berechnet (rekursiv) aus einer Näherungslösung x_n (das ist ein x-Wert, der nahe an der Lösung von $f(x) = 0$ liegt)
eine noch bessere Näherungslösung x_{n+1} nach der Formel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dazu benötigt man die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$ und eine erste Näherungslösung x_0; diese wird aus der Zeichnung abgelesen, indem man die Gerade $y = -2$ einzeichnet und den x-Wert des Schnittpunktes S in etwa abliest: man nimmt z.B. $x_0 = -0,3$
(siehe dazu die Zeichnung auf Seite 3).

Durchführung des Newtonschen Näherungsverfahrens

Indem man die Startlösung x_0 in die (rekursive) Gleichung

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ &= x_n - \frac{x_n^3 - 12x_n^2 + 36x_n + 12}{3x_n^2 - 24x_n + 36} \end{aligned}$$

einsetzt, erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{x_0^3 - 12x_0^2 + 36x_0 + 12}{3x_0^2 - 24x_0 + 36} \qquad (\text{mit } x_0 = -0,3) \\ &= -0,3 - \frac{(-0,3)^3 - 12\cdot(-0,3)^2 + 36\cdot(-0,3) + 12}{3\cdot(-0,3)^2 - 24\cdot(-0,3) + 36} \\ &= -0,3 - \frac{0,093}{43,47} \\ \Longrightarrow \quad x_1 &\approx -0,3 - 0,0021394... = -0,3021394... \\ x_2 &= x_1 - \frac{x_1^3 - 12x_1^2 + 36x_1 + 12}{3x_1^2 - 24x_1 + 36} \\ \Longrightarrow \quad x_2 &\approx -0,302138... \end{aligned}$$

Von x_1 auf x_2 haben sich die ersten drei Stellen nach dem Komma (erstmals) nicht geändert (sogar die ersten fünf Stellen).
Daher ist $x = -0,302$ ein Näherungswert für die x-Koordinate von S.

2.Möglichkeit: Mit dem grafischen Taschenrechner (GTR)

Mit der Funktion $(*)$ der vorigen Seite, also mit

$$\text{Y} = X\text{^}3 - 12X\text{^}2 + 36X + 12$$

erhält man mit den Einstellungen

$$x_{\min} = -1 \quad \text{bis} \quad x_{\max} = 1 \qquad \text{und} \qquad y_{\min} = -10 \quad \text{bis} \quad y_{\max} = 40$$

sofort die Nullstelle

$$x_{\text{null}} \approx -0,3021380497$$

Bemerkung: Für die richtigen Einstellungen im x- und y-Bereich zeigt man sich die Wertetabelle mit dem GTR an.

c) ## Gleichung für g_t

Da die Ursprungsgerade g_t durch den Wendepunkt W_t von K_t geht,
muss man diesen Wendepunkt zunächst bestimmen.

Wendepunkt von K_t

Mit $f_t(x) = \frac{1}{3t}x(x-3t)^2 = \frac{1}{3t}x(x^2-6tx+9t^2) = \frac{1}{3t}(x^3-6tx^2+9t^2x)$
erhält man die Ableitungen

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{1}{3t}\cdot(3x^2-12tx+9t^2) \\ f_t''(x) &= \frac{1}{3t}\cdot(6x-12t) \\ f_t'''(x) &= \frac{1}{3t}\cdot 6 = \frac{2}{t} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $f_t''(x) = 0$ liefert die Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{3t}\cdot(6x-12t) &= 0 \\ \frac{2}{t}\cdot x - 4 &= 0 \quad |+4 \\ \frac{2}{t}\cdot x &= 4 \quad |\cdot\frac{t}{2} \\ x &= 2t \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung $f_t''(2t) = 0$ und $f_t'''(2t) = \frac{2}{t} \neq 0$ ist erfüllt.
Bei $x = 2t$ liegt also eine Wendestelle vor.
Mit dem Funktionswert $f_t(2t) = \frac{1}{3t}\cdot 2t\cdot(2t-3t)^2 = \frac{2t}{3t}\cdot(-t)^2 = \frac{2}{3}t^2$ erhält man den

$$\text{Wendepunkt } W_t\left(2t \,\middle|\, \frac{2}{3}t^2\right)$$

Aufstellen der Geradengleichung von g_t

Da g_t eine Ursprungsgerade ist, hat g_t die Darstellung $g_t(x) = m \cdot x$
(der y-Achsenabschnitt b bzw. c ist also null).

Die Punktprobe mit $W_t: \; x = 2t \; ; \; y = \frac{2}{3}t^2$ liefert dann

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}t^2 &= m \cdot 2t \quad | \cdot \frac{1}{2t} \\
\frac{2}{3}t^2 \cdot \frac{1}{2t} &= m \\
m &= \frac{2t^2}{6t} \quad \text{(kürzen von } 2t\text{)} \\
\Longrightarrow \quad m &= \frac{t}{3}
\end{aligned}$$

Damit hat die Gerade die Gleichung $g_t(x) = \frac{t}{3} \cdot x$.

Wert(e) t, für die g_t die Normale im Wendepunkt W_t ist

Zwei Geraden sind identisch, wenn sie die gleiche Steigung haben und durch einen gemeinsamen Punkt verlaufen. Da der Wendepunkt W_t sowohl auf g_t als auch auf der Normalen im Wendepunkt liegt, muss nur geprüft werden, für welchen Werte von t die Steigung $m = \frac{t}{3}$ von g_t mit der Steigung m_n der Normalen übereinstimmt.

Steigung der Normalen im Wendepunkt W_t

Die Steigung m_t der **Tangenten** im Wendepunkt $W_t(2t|\frac{2}{3}t^2)$ ist

$$\begin{aligned}
m_t &= f_t'(2t) \\
&= \frac{1}{3t}(3 \cdot (2t)^2 - 12t \cdot (2t) + 9t^2) \\
&= \frac{1}{3t}(\overbrace{3 \cdot 4t^2 - 24t^2 + 9t^2}^{=12t^2-24t^2+9t^2=-3t^2}) \\
&= \frac{-3t^2}{3t} \\
m_t &= -t \quad \text{; die Steigung } m_n \text{ der } \textbf{Normalen} \text{ ist der negative Kehrwert von } m_t\text{:} \\
\Longrightarrow \quad m_n &= -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-t} = \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Da $m = \frac{t}{3}$ und $m_n = \frac{1}{t}$ übereinstimmen müssen, erhält man die Bedingung

$$\begin{aligned}
m &= m_n \\
\frac{t}{3} &= \frac{1}{t} \quad | \cdot 3t \\
t^2 &= 3 \quad | \sqrt{(\cdot)} \\
t_1 = \sqrt{3} \quad &; \quad t_2 = -\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Wegen $t > 0$ (siehe Aufgabenstellung) ist die einzige Lösung $t = \sqrt{3}$:

Für den Wert $t = \sqrt{3}$ ist die Gerade g_t die Normale im Wendepunkt W_t von K_t.

d) Bedingung für die Koeffizienten von h für keinen Extrempunkt

Da h eine ganzrationale Funktion 3. Grades sein soll, hat h eine Darstellung der Form

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad \text{mit } a \neq 0 \text{ (sonst wäre der Grad von } h \text{ nicht 3).}$$

Zur Untersuchung auf Extrempunkte benötigt man die

Ableitungen von h

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ h''(x) &= 6ax + 2b \\ h'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für Extrempunkte $h'(x) = 0$ führt auf die Gleichung

$$3ax^2 + 2bx + c = 0 \qquad (**)$$

Diese quadratische Gleichung hat die Diskriminante

$$D = (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot c = 4b^2 - 12ac = 4 \cdot (b^2 - 3ac)$$

1.Fall: $D < 0$

Für $D = 4 \cdot (b^2 - 3ac) < 0 \overset{|:4}{\iff} b^2 - 3ac < 0$ hat die quadratische Gleichung $(**)$ keine Lösung; die Funktion h hat also für $b^2 - 3ac < 0$ keine(n) Extrempunkt(e).

2.Fall: $D = 0$

Für $D = 4 \cdot (b^2 - 3ac) = 0 \overset{|:4}{\iff} b^2 - 3ac = 0$ hat die quadratische Gleichung $(**)$ genau eine Lösung. Diese ist

$$x_W = \frac{-2b \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3a} = -\frac{b}{3a}$$

Beim Nachprüfen der hinreichenden Bedingung ergibt sich

$$h''(-\frac{b}{3a}) = 6a \cdot \left(-\frac{b}{3a}\right) + 2b = -\frac{6ab}{3a} + 2b = -2b + 2b = 0$$

Die hinreichende Bedingung ist also nicht erfüllt; das bedeutet, dass man bisher nicht entscheiden kann, ob für $b^2 - 3ac = 0$ bei $x_W = -\frac{b}{3a}$ ein Extrempunkt vorliegt oder nicht.
Da mit $h''(-\frac{b}{3a}) = 0$ jedoch die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt erfüllt ist und mit $h'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0$ auch die hinreichende Bedingung, liegt in diesem Fall bei $x_W = -\frac{b}{3a}$ ein **Wendepunkt** vor (also **kein Extrempunkt** für $b^2 - 3ac = 0$).

3.Fall: $D > 0$

Für $D = 4 \cdot (b^2 - 3ac) > 0 \overset{|:4}{\iff} b^2 - 3ac > 0$ hat die quadratische Gleichung $(**)$ genau zwei **von $\mathbf{x}_W = -\frac{b}{3a}$ verschiedene** Lösungen

$$x_{1;\,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{\overbrace{4b^2 - 12ac}^{>0}}}{2 \cdot 3a} = \underbrace{-\frac{b}{3a} \pm \frac{\sqrt{\overbrace{4 \cdot (b^2 - 3ac)}^{>0}}}{6a}}_{\neq -\frac{b}{3a} = x_W}$$

Da der lineare Ausdruck $h''(x) = 6ax + 2b$ nur eine Nullstelle hat und diese Nullstelle bei $x_W = -\frac{b}{3a}$ liegt, gilt sicherlich $h''(x_1) \neq 0$ und $h''(x_2) \neq 0$ (ohne dies nachzurechnen!).
Hier ist also die hinreichende Bedingung für Extrempunkte jeweils erfüllt: die Funktion h hat im Fall $b^2 - 3ac > 0$ zwei Extrempunkte.

Ergebnis: Eine ganzrationale Funktion $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ hat genau dann keine Extrempunkte, wenn gilt

$$b^2 - 3ac \leq 0$$

Gemeinsame Punkte von h mit der x-Achse im Fall $b^2 - 3ac \leq 0$ (keine Extrema)

Jede ganzrationale Funktion f ungeraden Grades (also auch h) hat den Wertebereich $W = \mathbb{R}$.

Ist a der Koeffizient der größten Hochzahl, dann gilt

$$\text{für } a > 0: \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x \longrightarrow -\infty & : & h(x) \longrightarrow -\infty \\ x \longrightarrow +\infty & : & h(x) \longrightarrow +\infty \end{array} \right.$$

$$\text{für } a < 0: \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x \longrightarrow -\infty & : & h(x) \longrightarrow +\infty \\ x \longrightarrow +\infty & : & h(x) \longrightarrow -\infty \end{array} \right.$$

Da h im Fall $b^2 - 3ac \leq 0$ auch keine Extrempunkte hat, ist die Funktion h streng monoton (und zwar streng monoton wachsend im Fall $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$).

Damit hat h genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse.