Original Abituraufgaben - Geometrie

Aufgabe mit Lösung:

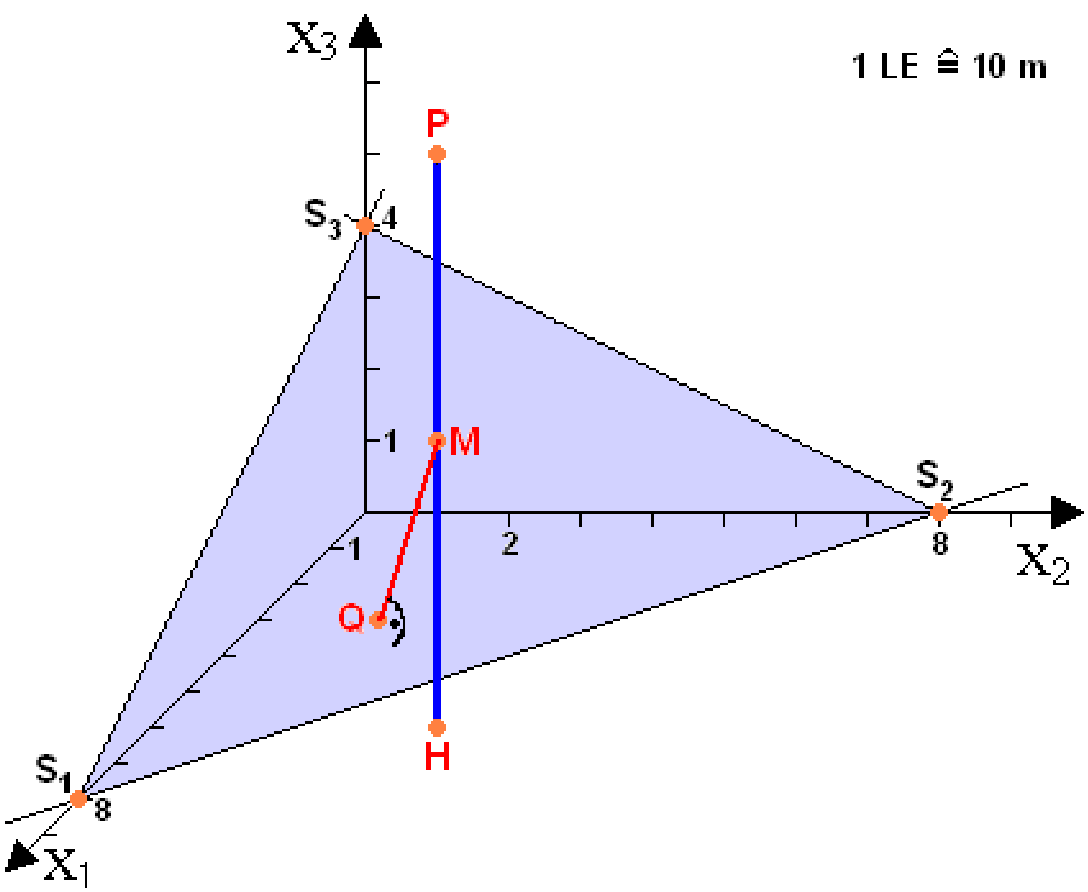
Abiturprüfung Baden-Württemberg 2007

Wahlteil - Geometrie 1

Die Ebene $E: x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$ stellt für $x_3 \geq 0$ einen Hang dar, der aus der x_1x_2-Ebene aufsteigt.

Im Punkt $H(6|4|0)$ steht ein 80 m hoher Sendemast senkrecht zur x_1x_2-Ebene.
(1 LE entspricht 10 m)

Darstellung von Hang und Sendemast in einem Koordinatensystem



Original - Aufgabenstellung

Teilaufgabe 1. a) Stellen Sie den Hang und den Sendemast in einem Koordinatensystem dar.

Bestimmen Sie den Neigungswinkel des Hangs.

Der Sendemast wird auf halber Höhe mit einem möglichst kurzen Stahlseil am Hang verankert.

Berechnen Sie die Koordinaten des Verankerungspunktes am Hang.
Bestimmen Sie die Länge des Stahlseils.

(6 VP)

Lösung

1. a) Neigungswinkel α des Hangs

Der Neigungswinkel α des Hangs entspricht dem Winkel, den die Ebene E und die x_1x_2-Ebene $x_3 = 0$ miteinander einschließen.

Mit dem Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}_E| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ der Ebene E

und dem Normalenvektor $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\vec{e}_3| = 1$ der x_1x_2-Ebene erhält man

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{|\vec{n}_E \bullet \vec{e}_3|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{e}_3|} \\
\cos(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6} \cdot 1} \\
&= \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{6}} \\
\Longrightarrow \quad \alpha &\approx 35,26^\circ
\end{aligned}$$

Koordinaten des Verankerungspunktes Q am Hang

Der 80 m hohe Sendemast beginnt in $H(6|4|0)$. Außerdem entsprechen einer Längeneinheit LE laut Aufgabe 10 m, also entsprechen 80 m Höhe 8 LE in x_3-Richtung.
Daher wird die x_3-Koordinate von H um 8 vergrößert, um den Endpunkt $P(6|4|8)$ des Sendemastes zu erhalten.

Da der Sendemast in halber Höhe verankert wird, entspricht dies dem Mittelpunkt $M(6|4|4)$ von H und P. Damit das Stahlseil mit einem möglichst kurzen Stahlseil verankert wird, ist nun der Lotfußpunkt Q der Mitte M auf die Ebene E gesucht, siehe Skizze oben.

Diesen gesuchten Punkt Q erhält man als Schnittpunkt der Ebene E mit der Lotgeraden (senkrechten/orthogonalen Geraden) g durch M zur Ebene E, also durch Schnitt der Ebene E mit der Geraden durch M, die den Normalenvektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E als Richtungsvektor hat:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = 6 + t \\ x_2 = 4 + t \\ x_3 = 4 + 2t \end{cases}$$

Setzt man die Koordinaten von g in $E: x_1 + x_2 + 2x_2 = 8$ ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} 6 + t + 4 + t + 2 \cdot (4 + 2t) &= 8 \\ 6 + t + 4 + t + 8 + 4t &= 8 \\ 6t + 18 &= 8 \qquad \mid -18 \\ 6t &= -10 \qquad \mid :6 \\ t &= -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von $t = -\frac{5}{3}$ in die Gleichung von g ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{18}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{12}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der gesuchte Verankerungspunkt ist damit der Punkt $Q\left(\frac{13}{3}\middle|\frac{7}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

Länge d des Stahlseils

Die Länge des Stahlseils MQ entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{MQ}$ bzw. dem Abstand des Punktes M zur Ebene E.

1. Möglichkeit: über die Länge des Vektors $\overrightarrow{MQ}$

Mit

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MQ} &= \vec{q} - \vec{m} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{18}{3} \\ \frac{12}{3} \\ \frac{12}{3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

erhält man die Länge d des Stahlseils zu

$$\begin{aligned}
d &= |\overrightarrow{MQ}| = \left| \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{150}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 6} \\
\Longrightarrow \quad d &= \frac{5}{3} \cdot \sqrt{6}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: über die Hessesche Normalform (HNF) der Ebene E

Den Abstand des Punktes M zur Ebene E erhält man auch durch Einsetzen der Koordinaten von M in die Hessesche Normalform der Ebene E. Dazu wird zunächst die Gleichung $x_1 + x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ der Ebene E durch die Länge $|\vec{n}_E| = \sqrt{6}$ des Normalenvektors geteilt:

$$\text{HNF von } E: \quad \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - 8}{\sqrt{6}} = 0$$

Setzt man hier die Koordinaten von $M(6|4|4)$ ein und nimmt den Betrag davon, dann ergibt sich die Länge des Stahlseils zu

$$\begin{aligned}
d &= \frac{|6 + 4 + 2 \cdot 4 - 8|}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{6} \\
\Longrightarrow \quad d &= \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$