

Aufgabe mit Lösung:

Abiturprüfung Bayern 2007

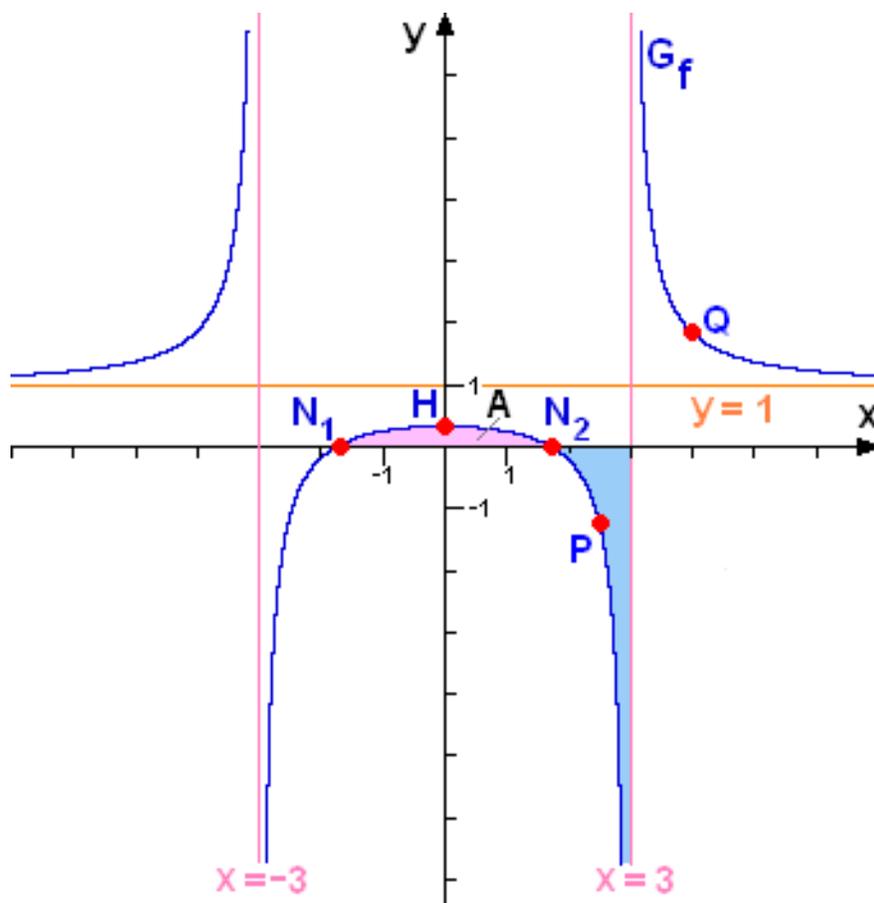
Grundkurs Mathematik - Infinitesimalrechnung 2

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

mit maximalem Definitionsbereich D_f . Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

Skizze



Original - Aufgabenstellung

Teilaufgabe 1. a) Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D_f , die Nullstellen von f und das Symmetrieverhalten von G_f an.

(4 BE)

Teilaufgabe b) Untersuchen Sie das Verhalten von f an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von G_f an.

(6 BE)

Teilaufgabe c) Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extrempunkts E von G_f .

[Zur Kontrolle: $E(0|\frac{1}{3})$]

(6 BE)

Lösung

1. a) Maximaler Definitionsbereich D_f von f

Bei einer gebrochenrationalen Funktion wie im vorliegenden Fall darf der Nenner nicht 0 werden:

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= 0 \\(x + 3) \cdot (x - 3) &= 0 \\x_1 = -3 \quad ; \quad x_2 &= 3 \\ \implies D_f &= \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}\end{aligned}$$

Nullstelle von f

$$\begin{aligned}f(x) &= 0 \\ \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} &= 0 \quad | \cdot (x^2 - 9) \\ x^2 - 3 &= 0 \quad | + 3 \\ x^2 &= 3 \quad | \sqrt{(\dots)} \\ x_1 = -\sqrt{3} \quad ; \quad x_2 &= \sqrt{3} \approx 1,73\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte von G_f mit der x -Achse sind also die Punkte

$$N_1(-\sqrt{3}|0) \quad ; \quad N_2(\sqrt{3}|0)$$

Symmetrieverhalten von G_f

Dazu berechnet man $f(-x)$ und vergleicht mit dem Funktionsterm $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^2 - 9} \\ &= \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} \\ \Rightarrow f(-x) &= f(x) \quad \text{für alle } x \text{ aus } D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\} \end{aligned}$$

Daher ist das Schaubild G_f von f achsensymmetrisch zur y -Achse.

b) Verhalten von f an den Rändern von D_f und Asymptoten

Der Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\} =]-\infty; -3[\cup]-3; 3[\cup]3; +\infty[$ hat die Ränder $\pm\infty$ und ± 3 :

$$x \rightarrow \pm\infty: f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} \rightarrow \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

Daher ist die Gerade $y = 1$ die waagrechte Asymptote von G_f .

$$\begin{aligned} x \rightarrow 3^- (x < 3): f(x) &= \frac{\overbrace{x^2 - 3}^{-6}}{\underbrace{(x - 3)}_{\rightarrow 0^-} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{-6}} \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 3^+ (x > 3): f(x) &= \frac{\overbrace{x^2 - 3}^{-6}}{\underbrace{(x - 3)}_{\rightarrow 0^+} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{-6}} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\begin{aligned} x \rightarrow -3^- (x < -3): f(x) &\rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -3^+ (x > -3): f(x) &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Daher sind die Geraden $x = -3$ und $x = 3$ die senkrechten Asymptoten von G_f .

c) Art und Lage des relativen Extrempunkts E von G_f

Dazu benötigt man die erste

Ableitung von f

Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \frac{u(x)}{v(x)}$ wird mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

abgeleitet. Hier erhält man

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 18x - (2x^3 - 6x)}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{-12x}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -12x &= 0 && | : (-12) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung über einen Vorzeichenwechsel von f'

Es genügt, bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von f' nachzuweisen:

Für $x < 0$ gilt $-12x > 0$ und damit $f'(x) > 0$ (denn der Nenner ist positiv).

Für $x > 0$ gilt $-12x < 0$ und damit $f'(x) < 0$.

Die Ableitung f' hat also bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus.

Damit liegt bei $x = 0$ ein relatives Maximum vor. Mit dem Funktionswert $f(0) = \frac{0-3}{0-9} = \frac{1}{3}$ erhält man den

$$\text{Hochpunkt } E = H \left(0 \mid \frac{1}{3} \right)$$

Zusatz: zweite Ableitung

Der übliche Weg wäre der Nachweis von $f''(0) \neq 0$ gewesen. Zur Ergänzung hier noch die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-12 \cdot (x^2 - 9)^2 - (-12x) \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} && ; \text{ Kürzen von } (x^2 - 9): \\ &= \frac{-12 \cdot (x^2 - 9) + 12x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^3} \\ &= \frac{-12x^2 + 108 + 48x^2}{(x^2 - 9)^3} \\ &= \frac{36x^2 + 108}{(x^2 - 9)^3} \end{aligned}$$

Es gilt $f''(0) = \frac{108}{(-9)^3} < 0$; dies weist ebenfalls nach, dass bei $x = 0$ ein relatives Maximum vorliegt.