

Geometrie - Aufgabe mit Lösung

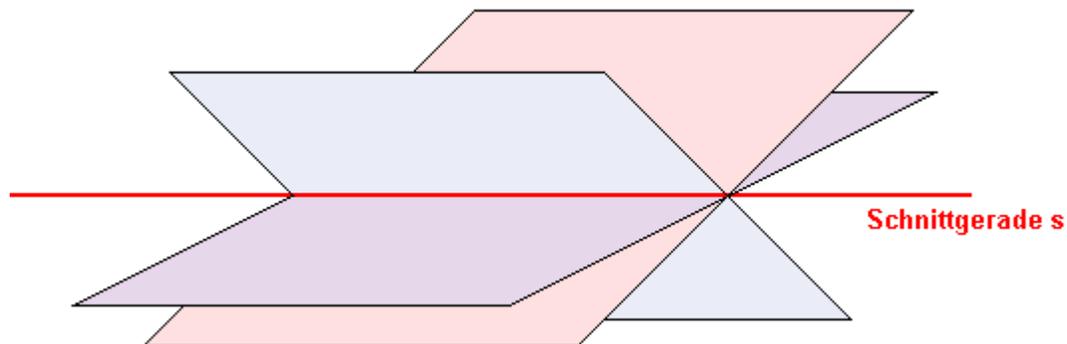
Aufgabe: a) Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) auf Lösbarkeit:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch. (5 VP)

Lösung: Jede der Ebenen enthält eine Gerade, die allen drei Ebenen gemeinsam ist.
Dies veranschaulicht die folgende

Skizze



Darauf kommt man folgendermaßen:

zu a) Aus dem gegebenen Gleichungssystem erhält man die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

Mit $(II') = 2 \cdot (I) + (-1) \cdot (II)$ und $(III') = (I) + (-1) \cdot (III)$ folgt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II')} \\ \text{(III')} \end{array}$$

und mit $(III'') = (II') + (III')$ erhält man schließlich die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{(I)} \\ \text{(II')} \\ \text{(III'')} \end{array}$$

Die obere Matrix enthält eine Nullzeile.

Das gegebene Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Setzt man $x_3 = t \in \mathbb{R}$, dann folgt aus (II')

$$\begin{array}{rcl} -3x_2 + 5t & = & -1 \quad | - 5t \\ -3x_2 & = & -1 - 5t \quad | \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ x_2 & = & \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \end{array}$$

Aus (I) folgt schließlich

$$\begin{array}{rcl} x_1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3}t\right) + t & = & 1 \\ x_1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t & = & 1 \quad | + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ x_1 & = & \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t \end{array}$$

Als Lösung ergibt sich damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

bzw. mit $t = 3r$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; r \in \mathbb{R}$$

zu b) Jede der drei Gleichungen kann man geometrisch als Ebene im dreidimensionalen Raum auffassen. Diese Ebenen sind nicht parallel und haben als Schnittgerade s die Gerade

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad ; r \in \mathbb{R}$$

Zur geometrischen Veranschaulichung siehe die Skizze oben (erste Seite).