Musteraufgaben 2007 - 2008

Analysis - Aufgabe mit Lösung

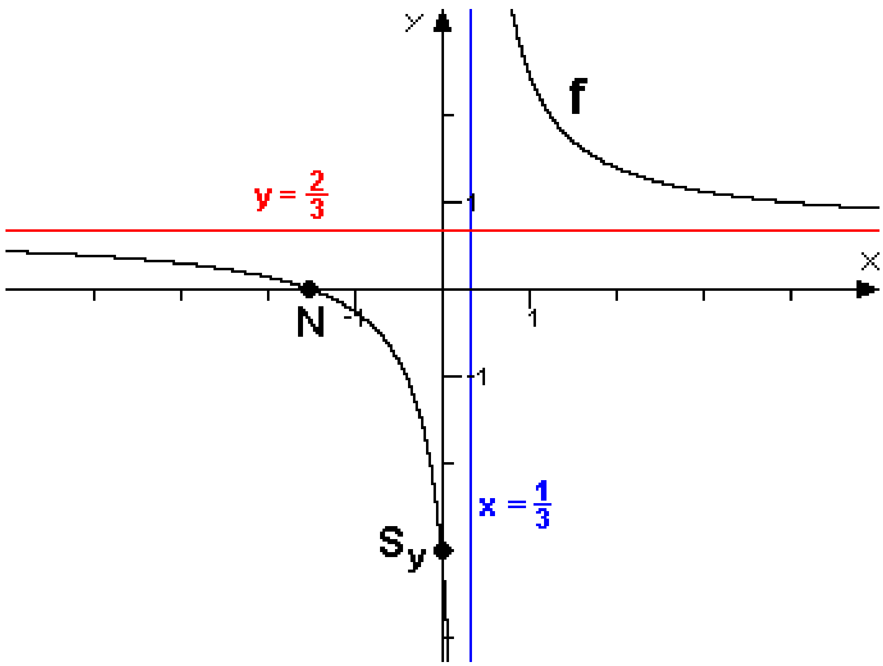
Aufgabe: Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{2x+3}{3x-1}$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von f.
Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und auf Asymptoten.
Skizzieren Sie das Schaubild von f

b) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f. (5 VP)

Lösung: zu a)



Bei gebrochenrationalen Funktionen muss man die Nennernullstellen aus dem Definitionsbereich ausschließen:

$$\begin{aligned} 3x-1 &= 0 \quad |+1 \\ 3x &= 1 \quad |:3 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Für den maximalen Definitionsbereich von f erhält man damit

$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{3}\}$$

Den Schnittpunkt mit der y-Achse ($x = 0$) erhält man durch

$$f(0) = \frac{3}{-1} = -3 \quad \Longrightarrow \quad S_y(0|-3)$$

Den Schnittpunkt mit der x-Achse ($y = 0$) erhält man durch $f(x) = 0$.
Beachte dabei, dass es bei gebrochenrationalen Funktionen ausreicht,
den Zähler nullzusetzen:

$$\begin{aligned} 2x+3 &= 0 && \mid -3 \\ 2x &= -3 && \mid :2 \\ x &= -\frac{3}{2} && \Longrightarrow \quad N(-\tfrac{3}{2}|0) \end{aligned}$$

Es gibt zwei Arten von Asymptoten:

Waagrechte Asymptote: (Verhalten für $x \longrightarrow \pm\infty$):

$$x \longrightarrow \pm\infty : \quad f(x) = \frac{2x+3}{3x-1} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{2+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}} \longrightarrow \frac{2}{3}$$

Daher ist $y = \frac{2}{3}$ die waagrechte Asymptote.

Man kann stattdessen auch eine Polynomdivision durchführen
(das geht genau dann, wenn der Zählergrad mindestens gleich dem Nennergrad ist):

$$\begin{array}{l} (2x+3) : (3x-1) = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{3x-1} \\ \underline{-(2x-\frac{2}{3})} \\ \qquad \frac{11}{3} \end{array}$$

Für $x > \frac{1}{3}$ gilt $\frac{1}{3x-1} > 0$ und für $x < \frac{1}{3}$ gilt $\frac{1}{3x-1} < 0$.

Daher wird die waagrechte Asymptote $y = \frac{2}{3}$

für $x \longrightarrow +\infty$ von oben und
für $x \longrightarrow -\infty$ von unten angenähert.

Senkrechte Asymptote: (Verhalten für $x \longrightarrow \frac{1}{3}$, also gegen die Definitionslücke):

Für $x \longrightarrow \frac{1}{3}$ geht der Zähler gegen $\frac{11}{3} > 0$ und der Nenner gegen null.
Daher ist $x = \frac{1}{3}$ die senkrechte Asymptote; dort liegt ein Pol mit Vorzeichenwechsel vor (denn $3x-1$ wechselt bei $x = \frac{1}{3}$ das Vorzeichen).

Im Einzelnen gilt

$$\begin{aligned} x \longrightarrow \frac{1}{3} \ (x < \tfrac{1}{3}) &: \quad f(x) \longrightarrow -\infty \\ x \longrightarrow \frac{1}{3} \ (x > \tfrac{1}{3}) &: \quad f(x) \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

zu b) Mit einer Polynomdivision (siehe oben) erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3} + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{3x-1} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{11}{9} \cdot \frac{1}{x-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{2}{3}x$.
Eine Stammfunktion von $\frac{1}{x-\frac{1}{3}}$ ist $\ln|x-\frac{1}{3}|$.

Für eine Stammfunktion von f erhält man also

$$F(x) = \frac{2}{3}x + \frac{11}{9} \cdot \ln|x - \frac{1}{3}|$$