Komplexe Zahlen

Inhaltsverzeichnis

1.Vorwort

Ich habe mich bei der Vergabe der Facharbeitsthemen für das Thema „Komplexe Zahlen“ entschieden, weil ich im Vorfeld darüber informiert wurde, dass mit Hilfe dieser Zahlen Lösungen für Gleichungen gefunden werden können, die in $\mathbb{R}$ nicht lösbar sind. Dieses schien mir sinnvoll und interessant zu sein.

Demnach möchte ich im Rahmen dieser Facharbeit versuchen die Funktionen und Regeln der Komplexen Zahlen zu erläutern. Als Aufgabenstellung wird erwartet, dass ich die Zahlenmenge $\mathbb{C}$ als Erweiterung der reellen Zahlen einführe und sie in der Gaußebene und der Polarform darstelle. Außerdem sollen Addition/ Multiplikation und Konjugation geeignet definiert werden. Beginnen werde ich jedoch mit der geschichtlichen Entstehung der komplexen Zahlenmenge und des Symbols „i“.

Im Weiteren werde ich dann die komplexen Zahlen definieren und ihre Darstellungsformen in der Gaußschen Zahlenebene einführen.

Im Anschluss daran werden die Zahlen mit den bereits bestehenden Rechengesetzen überprüft und die Formeln für die Rechnungsverfahren wie Addition und Multiplikation hergeleitet.

Mit der Material- und Literaturbeschaffung gab es keine Probleme, da ich sowohl im Internet, als auch in der Bibliothek ein reichliches Angebot vorfinden konnte.

2.Historischer Rückblick

Der lange Prozess zur Entwicklung der komplexen Zahlen lässt sich wie folgt beschreiben: Die ersten Probleme der Mathematik bestanden darin, dass man einfache Rechenoperationen in einigen Fällen nicht anwenden konnte.

So reichten die zuerst definierten natürlichen Zahlen (1, 2, 3, …), mit denen man problemlos addieren und multiplizieren konnte, ohne den besagten Zahlenbereich verlassen zu müssen, zum Beispiel bei der einfachen Rechnung 3 geteilt durch 9 nicht mehr aus. Das Ergebnis ⅓ ist, wie alle Brüche, nicht mehr im Bereich der natürlichen Zahlen enthalten. Daher haben die Mathematiker den Zahlenbereich nicht nur um die ganzen Zahlen(-1, -2, -3, …), sondern auch um die rationalen- (Bsp.⅓) und die irrationalen Zahlen(Bsp. $\sqrt{2}$) erweitert.

Doch auch die Menge der reellen Zahlen war nicht vollständig. Denn es entstand das Problem, dass zum Beispiel bei der quadratischen Gleichung $x^2+40=10x$ als formale Lösungen 5+ $\sqrt{-15}$ und 5 $-\sqrt{-15}$ herauskam. Girolamo Cardano(1501-1576) hielt die Richtigkeit dieser Lösung für äußerst zweifelhaft und stellte somit

seinen Grundsatz auf „nur die Lösungen einer Gleichung anzuerkennen, deren Berechnungen in allen Schritten explizit ausgeführt werden können.“[1]. Rafael Bombelli knüpfte im 16.Jahrhundert hier an und betrachtete in seiner „L´algebra“ $\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ als besondere Vorzeichen neben + und −, doch blieb die Frage nach der Lösungsgesamtheit, trotz seiner 8 Rechenregeln bezüglich der Anwendung dieser Vorzeichen, weiterhin ungeklärt.
René Descartes(1596-1650) wurde dann mit seiner Schrift aus „La Geometrie“ der Begriff der imaginären Zahlen zugewiesen: „Man kann sich bei jeder Gleichung soviel Wurzeln einbilden wie der Grad angibt, nur entspricht diesen eingebildeten Wurzeln manchmal keine reelle Lösung.“[2] Descartes hielt also genau wie Leonard Euler(1707-1783), der das Standardsymbol i für $\sqrt{-1}$ einführte, die komplexen Zahlen für eine Lösung, die „nur in der Einbildung stattfinden würde.“[3]
So ließ sich also mit den imaginären Zahlen rechnen(mehr dazu in 3.1), doch schaffte es erst Carl Friedrich Gauß(1777-1855) diese in der Gauß´schen Zahlenebene(mehr dazu in 4.1) darzustellen und somit Anerkennung für die imaginären Zahlen zu finden.

3.Die Definition der komplexen Zahlen

3.1 Das Symbol i

Wie in 2. bereits erwähnt steht das Symbol „i“ (imaginäre Einheit) nach Leonard Euler symbolisch für $\sqrt{-1}$.

Somit also: $i=\sqrt{-1}$ oder besser $i^2=-1$

Damit war es nun möglich, z. B die Gleichung $x^2+a=0$ mit $a>0$ zu lösen.[4]

Denn: $x^2=a$ ergibt $x_{1,2}=\pm\sqrt{-a}$ oder $x_1=\sqrt{a}\cdot i$ und

$x_2=-\sqrt{a}\cdot i$ da $i=\sqrt{-1}$

Probe: $(\sqrt{a}\cdot i)\cdot(\sqrt{a}\cdot i)+a=0$

$(\sqrt{a})^2\cdot i^2+a=0$

$-a+a=0$ da $i^2=-1$

[1] Zitiert nach Mathematik lehren/ Heft 87 April 1998
[2] Zitiert nach Mathematik lehren/ Heft 87 April 1998
[3] Zitiert nach Mathematik lehren/ Heft 87 April 1998

[4] Mathematik lehren/ Heft 87 April 1998

Um aber mit ihnen rechnen zu können(wie es die Mathematiker vor der Zeit von Gauß schon taten), musste es zum Beispiel auch 2i oder 3i geben Dieses entsprach demnach $2\sqrt{-1}$ und $3\sqrt{-1}$, was im Umkehrschluss wiederum $\sqrt{-4}$ bzw. $\sqrt{-9}$ ergab(da: $2\sqrt{-1}=\sqrt{-1\cdot 2^2}=\sqrt{-4}$).

Aus diesen Erkenntnissen ist es also auch möglich imaginäre natürliche Zahlen, imaginäre negative Zahlen, imaginäre Brüche und imaginäre irrationale Zahlen zu erzeugen. (<u>Bsp</u>. $a=\sqrt{-\frac{1}{16}} \rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}\cdot i \rightarrow x_{1,2}=\pm(\frac{1}{4})\cdot i$)

3.2 Komplexe Zahlen

Für die Anerkennung der imaginären Zahlen, die ich in Teil 2 schon angedeutet habe, muss ein Mathematiker aber vernünftig mit ihnen rechnen können. Dies gelingt, indem man sie mit den reellen Zahlen verbindet.

<u>Beispiel:</u> $x^2-12x+52=0 \mid -16$

mit Kenntnis der binomischen Formeln und mit Hilfe von quadratischer Ergänzung erhält man:

$(x-6)^2=-16 \mid \sqrt{}$

$x_1-6=\sqrt{-16} \lor x_2-6=-\sqrt{-16}$

$x_1=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}+6 \lor x_2=-\sqrt{-16}+6$

<u>da:</u> $\sqrt{-1}=i$

$\Rightarrow x_1=4\mathrm{i}+6$

$\Rightarrow x_2=-4\mathrm{i}+6$

Die Verbindung hier von dem reellen Teil 6 und dem imaginären Teil 4i wird in der Mathematik als *komplexe Zahlen* definiert. Das Symbol der Zahlenmenge ist $\mathbb{C}$.

Die komplexe Zahl wird in der Form $a+bi=z$ dargestellt(mit $a,b\in R$) und kann daher als ein geordnetes Paar reeller Zahlen bezeichnet werden:

$z=(a;b)$ mit a als Realteil und b als Imaginärteil der komplexen Zahl z

<u>Abkürzung:</u> $a=\mathrm{Re}_{(z)}$ und $b=\mathrm{Im}_{(z)}$

<u>Auffallend:</u> Beim Einsetzen von $a=0$ erhält man eine rein imaginäre Zahl und bei $b=0$ eine rein reelle Zahl. Somit ist also jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl,

wenn der imaginäre Teil gleich 0 ist. (Bsp.: die reelle Zahl $\frac{1}{9}$ ist als komplexe Zahl

geschrieben: $(\frac{1}{9};0)$) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ ist Teilmenge von $\mathbb{C}$

Komplexe Zahlen

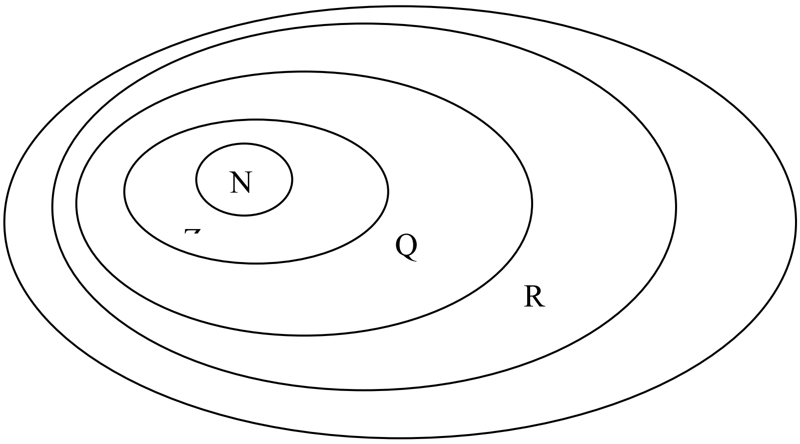
reelle Zahlen   imaginäre Zahlen

rationale Zahlen   irrationale Zahlen

ganze Z.   gebrochene Z.

natürliche Z.   Null   negative ganze Z.

(vereinfachte) Abbildung aus
„Vorlesungen über höhere Mathematik“
von Adalbert Duschek 1965 Springer Verlag S.16
zur Veranschaulichung von 1. und 2.2

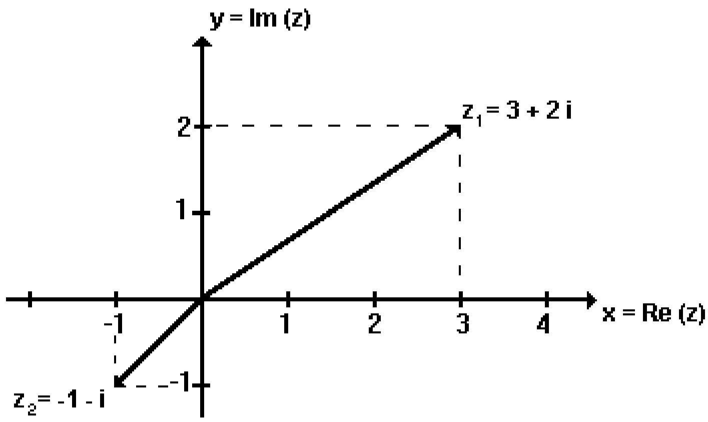


Selbst entworfene Darstellung zur Erweiterung der Zahlenbereichs um $\mathbb{C}$.
N= Natürlichen Zahlen , Z= Ganze Zahlen , Q= Rationale Zahlen , R= Reelle Zahlen
C= Komplexe Zahlen

4. Darstellungsformen in der Gaußschen Zahlenebene

4.1 Die Normalform (oder arithmetische Form)

Die komplexen Zahlen können in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden.
Da für die Darstellung der komplexen Zahlen der normale Zahlenstrahl nicht ausreicht, wurde er von Gauß um die imaginäre Achse erweitert. Diese Ebene hat den Aufbau wie ein Koordinatensystem, wobei die reelle Achse den Platz der x-Achse und die imaginäre Achse den Platz der y-Achse einnimmt. Jede komplexe Zahl steht für einen Punkt in der Zahlenebene, sowie jeder Punkt in der Zahlenebene für eine komplexe Zahl steht. Dennoch werden die Zahlen häufig als Zeiger(Ortsvektoren) dargestellt. Diese Darstellung $z=a+bi$ bezeichnet man als Normalform.



(Abbildung von http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/zeichnen.htm)

4.2 Die Polarform(oder trigonometrische Form)

In dieser Darstellungsform werden die komplexen Zahlen mit Hilfe eines Pfeils, der vom Ursprung bis zu dem Punkt z verläuft, und dem dazugehörigen Winkel abgebildet. Die Länge des Pfeils wird „der Betrag von z“ genannt, für den nach Pythagoras gilt: $|z|^2=a^2+b^2$ bzw. $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Der Winkel, der von $|z|$ und der reellen Achse eingeschlossen wird, wird zumeist mit dem griechischen Buchstaben ϕ gekennzeichnet. Er wird gemessen, indem man bei Re(z) beginnt und gegen den Uhrzeigersinn bis zum Pfeil der komplexen Zahl misst.

Die Polarform lautet: $z=|z|\cdot(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)$

Der Beweis ergibt sich aus folgenden Überlegungen:

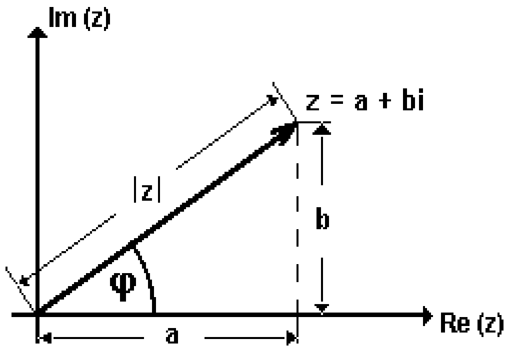
Für den Winkel ϕ gilt: $\sin\phi=\frac{b}{|z|}$ $\cos\phi=\frac{a}{|z|}$

($\tan \phi = \frac{b}{a}$ für Beweis nicht von Bedeutung)

Dies lässt sich umformen zu: $\Rightarrow b = \sin \phi \cdot |z|$ und $a = \cos \phi \cdot |z|$

a und b einsetzen in $\Rightarrow z = a + bi = |z| \cdot \cos \phi + |z| \cdot \sin \phi \cdot i$

daher *nach ausklammern:* $z = |z| \cdot (\cos \phi + i \cdot \sin \phi)$ [5]

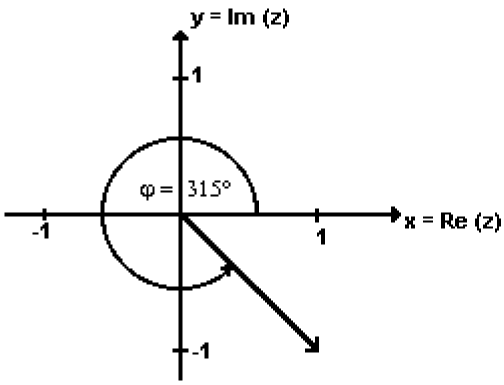


(Abbildung von http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/polar.htm)

<u>Beispiel einer Rechnung</u>: $|z| = \sqrt{2}$, $\phi = 315°$, GTR bei Mode auf „Degree"

$$\Rightarrow z = \sqrt{2} \cdot (\cos 315° + i \sin 315°)$$

$$\boxed{\Rightarrow z = 1 - i}$$



(Abbildung von http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/polar.htm)

Es existiert auch noch eine dritte Darstellungsform. Mit Hilfe der „Eulerschen Formel"($e^{i \cdot \phi} = \cos \phi + i \sin \phi$) ergibt sich die

<u>Exponentialform</u>: $z = |z| \cdot e^{i \cdot \phi}$

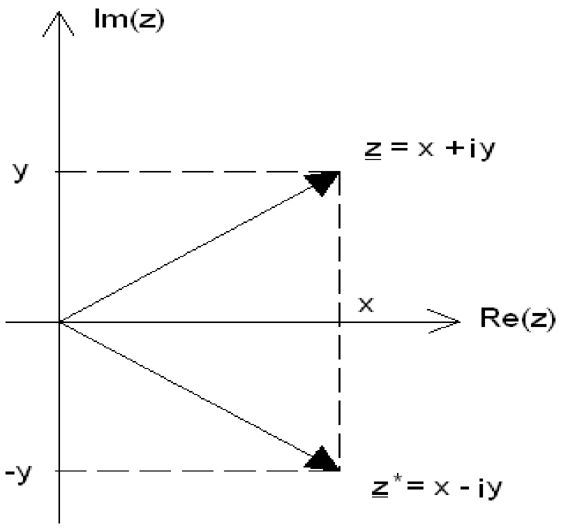
Mit dieser Form lassen sich ebenfalls die später folgenden Rechenoperationen durchführen(hierbei muss für ϕ immer mit dem Bogenmaß gerechnet werden; also

[5] http://www.hh.schule.de/hhs/info11-13/bio-babs/polar.htm

$360° = 2\pi$; $180° = \pi$). Sie ist meistens sogar einfacher und benötigt keine umständliche Herleitung, doch würde sie den Rahmen dieser Facharbeit sprengen.

5.Konjugation komplexer Zahlen

Die zu z konjugierte Zahl erhält man, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils umkehrt. So sind die Zahlen $z = x + yi$ und $\bar{z} = x - yi$ konjugiert zueinander. Geometrisch drückt sich die konjugierte Zahl $\bar{z}$ (gelesen: z quer, manchmal auch z* geschrieben) in der Spiegelung von z an der reellen Achse aus.



(Abbildung von www.techfak.uni-kiel.de/.../illustr/spiegeln.gif)

Weiterhin ist die Konjugation komplexer Zahlen mit der Addition und Multiplikation *verträglich*[6], das heißt es gilt: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1^* \cdot z_2^*) = z_1^* \cdot z_2^*$

6. Das Rechnen mit komplexen Zahlen

Um mit den komplexen Zahlen die gängigen Rechenoperationen durchführen zu können, müssen wir die Verknüpfungen der Zahlen neu definieren, ohne dabei die in $\mathbb{R}$ bestehenden Gesetze zu vernachlässigen. Sobald der Spezialfall eintritt, dass bei einer komplexen Zahl der Imaginärteil gleich Null ist, darf der reale Teil der Zahl nicht von den bestehenden Verknüpfungen in $\mathbb{R}$ abweichen.

[6] Beweis der Verträglichkeit im Anhang

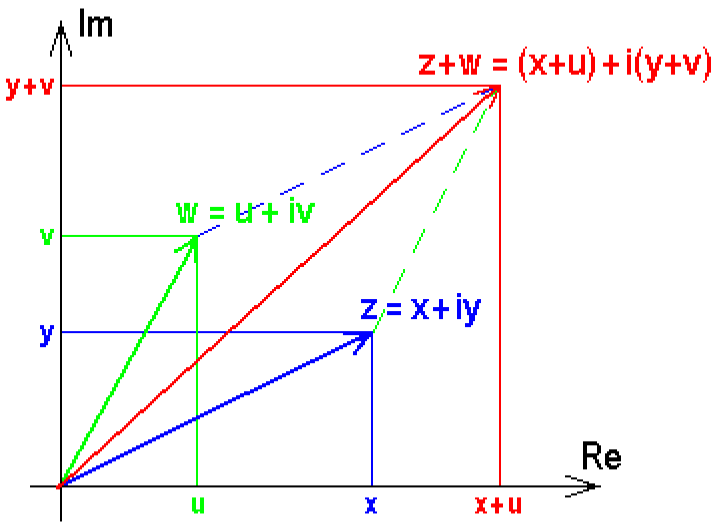
6.1 Addition

Die Addition zweier komplexer Zahlen erinnert stark an die Vektoraddition, da wir den Realteil der Zahlen jeweils getrennt von dem Imaginärteil der Zahlen addieren. Die Rechnung wird in der algebraischen Normalform durchgeführt.

$$(x+yi)+(u+vi)=(x+u)+(y+v)i$$

$$Bsp.:(4+8\mathrm{i})+(6+5\mathrm{i})=10+13i$$

Geometrische Darstellung der Addition in der Gaußschen Zahlenebene:



(Abbildung von www.thphys.uni-heidelberg.de)

Für diese Darstellung werden die beiden komplexen Zahlen z und w als Zeiger dargestellt. Zeichnet man jetzt das dazugehörige Parallelogramm, so erhält man mit der (roten) Diagonalen die Summe von z + w (für die Physiker ist dies die Resultierende Kraft eines Kräfteparallelogramms, für die Begrifflichkeit der Vektorrechnung ist es die Diagonale des Parallelogramms von den Ortsvektoren von w und z).

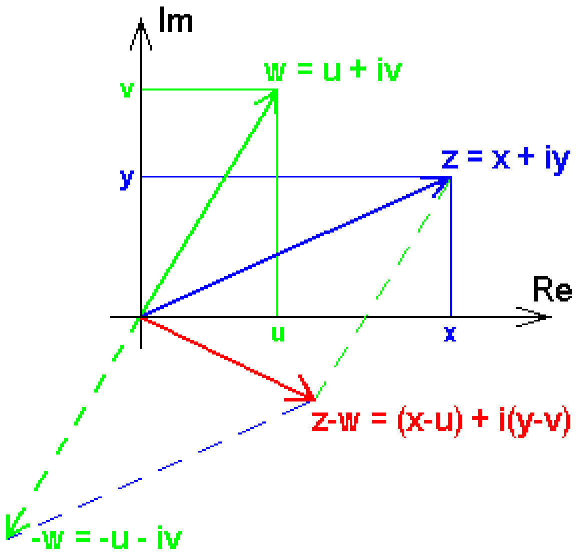
6.2 Subtraktion

Das Verfahren für die Subtraktion ist dem Verfahren der zuvor beschriebenen Addition sehr ähnlich. In diesem Falle wird der Realteil getrennt vom Imaginärteil subtrahiert.

$$(x+yi)-(u+vi)=(x-u)+(y-v)i$$

$$Bsp.:(8+6\mathrm{i})-(5+4\mathrm{i})=3+2\mathrm{i}$$

Um die Subtraktion geometrisch darzustellen, muss man von einer der beiden komplexen Zahlen den Gegenzeiger (bei $z=x+yi$ wäre dies $-z=-x-yi$) bilden und diesen mit dem nicht veränderten Zeiger zu einem Parallelogramm erweitern.



Die Differenz ist der rote Zeiger, der vom Ursprung der beiden komplexen Zahlen ausgeht und die Diagonale des Parallelogramms bildet.

(Abbildung von www.thphys.uni-heidelberg.de)

6.3 Multiplikation

Die Formel der Multiplikation in der Normalform lässt sich unter Anwendung des Distributivgesetzes und mit Hilfe der Definition von $i^2=-1$ wie folgt herleiten:

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; \begin{array}{l} (a+bi)\cdot(c+di) \\ (a\cdot c+a\cdot di+bi\cdot c+bi\cdot di) \\ a\cdot c+i^2\cdot b\cdot d+i\cdot a\cdot d+i\cdot b\cdot c \\ (ac-bd)+i\cdot(ad+bc) \end{array} \qquad \begin{array}{l} [z_1=(a+bi) \\ [z_2=(c+di) \end{array}[$$

<u>Beispiel</u>: $z_1=9-2\mathrm{i}$, $z_2=4+i$

$z_1\cdot z_2=(9-2\mathrm{i})\cdot(4+i)=(36+2)+i\cdot(9-8)=38+i$

Das Produkt konjugierter Zahlen ist stets reell: $z\cdot\bar{z}=(5+3\mathrm{i})\cdot(5-3\mathrm{i})=5^2-3^2i^2=34$

da $i^2=-1$

$z \cdot z^* = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$

Es ist ebenfalls möglich die Multiplikation in der Polarform darzustellen:

„Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet die Multiplikation der Beträge und die Addition der Winkel. Dadurch kann der Punkt $c_1\cdot c_2$ leicht in der Gaußschen Zahlenebene konstruiert werden.“[7]

[7] Zitiert aus Westermann „Mathematik für Ingenieure mit Maple“ Band 1, Springer Verlag Berlin 1996, Seite 202

Die dazugehörige Herleitung muss in der trigonometrischen Form ausgeführt werden:

$$z\cdot w=|z|\cdot(\cos\ \phi_1+i\sin\ \phi_1)\cdot|w|\cdot(\cos\ \phi_2+i\sin\ \phi_2)$$
$$z\cdot w=|z|\cdot|w|\cdot(\cos\ \phi_1+i\sin\ \phi_1)\cdot(\cos\ \phi_2+i\sin\ \phi_2)$$
$$z\cdot w=|z|\cdot|w|\cdot(\cos\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2+i\sin\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2+i\sin\ \phi_2\cdot\cos\ \phi_1-\sin\ \phi_1\cdot\sin\ \phi_2)\quad da{:}i^2=-1$$
$$z\cdot w=|z|\cdot|w|\cdot(\cos\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2-\sin\ \phi_1\cdot\sin\ \phi_2+i\cdot(\sin\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2+\sin\ \phi_2\cdot\cos\ \phi_1))$$

Jetzt können wir die Additionstheoreme[8] für $\cos(\ \phi_1+\phi_2)$ und $\sin(\ \phi_1+\phi_2)$ anwenden:

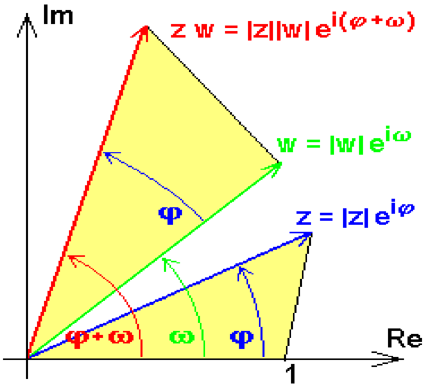
$$\Rightarrow\cos\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2-\sin\ \phi_1\cdot\sin\ \phi_2=\cos(\ \phi_1+\phi_2)$$
$$\Rightarrow\sin\ \phi_1\cdot\cos\ \phi_2+\sin\ \phi_2\cdot\cos\ \phi_1=\sin(\ \phi_1+\phi_2)$$

So erhält man zusammengesetzt:

$$z\cdot w=|z|\cdot|w|\cdot(\cos(\ \phi_1+\phi_2)+i\sin(\ \phi_1+\phi_2))$$

Die Exponentialform ergibt sich durch die Eulersche Formel(**s.4.2):**

$$z\cdot w=|z|\cdot|w|\cdot e^{(\ \phi_1+\phi_2)\cdot i}$$



(Abbildung von http://www.thphys.uni-heidelberg.de; z und w hier in Exponentialschreibweise)

<u>Rechnungsbeispiel</u>:

$z=-3+2\text{i}$, $w=2-4\text{i}$, $\phi_1=146{,}3\,°$, $\phi_2=296{,}6\,°$

[8] www.fbm.fh-aalen.de/Profumit/Fachinhalte/Lernhypertext/mathematikthemen/

$|z|=\sqrt{(-3)^2+(2)^2}=3{,}6$
$|w|=\sqrt{(2)^2+(-4)^2}=4{,}47$
$z\cdot w=3{,}6\cdot 4{,}47\cdot(\cos(146{,}3°+296{,}6)+i\cdot\sin(146{,}3°+296{,}6))$
$z\cdot w=16{,}1\cdot(\cos 442{,}9°+i\sin 442{,}9°)$
$z\cdot w=16{,}1\cdot(0{,}12+0{,}99i)$
$z\cdot w=1{,}93+15{,}94i$
$\phi_{1+2}=442.9\,bzw.\,442.9-360=82.9°$

(Zahlen jeweils auf zwei Nachkommastellen gerundet)

Man sieht hier schon, dass die Rechnung mit Hilfe der Exponentialgleichung nicht so umständlich geworden wäre. $\Rightarrow z\cdot w=3.6\cdot 4{,}47\cdot e^{(146{,}3+296{,}6)\cdot i}$

6.4 Division

Die Formel für die Division in der Normalform erhält man, indem man $\frac{z}{w}$ mit dem Konjugationspartner $\overline{w}$ des Nenners den Bruch erweitert.

Hierbei entsteht nach dem Ausmultiplizieren im Nenner eine rein reelle Zahl.

$$\frac{z}{w}=\frac{z}{w}\cdot\frac{\overline{w}}{\overline{w}}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac-adi+bic+bd)}{c^2+d^2} \quad \Big|\ \text{da } i^2=-1$$

$$\frac{z}{w}=\frac{(ac+bd)+i\cdot(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

<u>Bsp.:</u> $z=2+3\mathrm{i}$, $w=1-i$

$$\frac{z}{w}=\frac{(2\cdot 1+3\cdot(-1))+i\cdot(3\cdot 1-2\cdot(-1))}{1^2+(-1)^2}=\frac{-1+5\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$$

Auch bei der Division gibt es eine geometrische Interpretation. Die Herleitung für die Formel läuft ähnlich wie in der Normalform.

$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{|z|\cdot(\cos\phi+i\sin\phi)}{|w|\cdot(\cos\omega+i\sin\omega)} \quad \Big|\ \text{Erweitern mit konjugiertem Nenner}$$

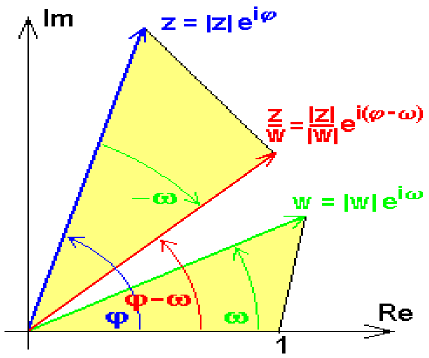
$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{|z|\cdot(\cos\phi+i\sin\phi)\cdot(\cos\omega-i\sin\omega)}{|w|\cdot(\cos\omega+i\sin\omega)\cdot(\cos\omega-i\sin\omega)} \quad \Big|\ \begin{array}{l}\text{Zähler: Ausmultiplizieren, } i^2=-1\\ \text{Nenner: 3.Bino. Formel, } i^2=-1\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\ \frac{\cos\phi\cdot\cos\omega-\cos\phi\cdot i\sin\omega+i\sin\phi\cdot\cos\omega+\sin\phi\cdot\sin\omega}{(\cos\omega)^2+(\sin\omega)^2} \quad \Big|\ \begin{array}{l}\text{Z: Umformen}\\ \text{N=1}\end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{z}{w}=\frac{|z|}{|w|}\ \frac{\cos\phi\cdot\cos\omega+\sin\phi\cdot\sin\omega+i\cdot(\sin\phi\cdot\cos\omega-\cos\phi\cdot\sin\omega)}{1}$$

$\Rightarrow$ Additionstheoreme[9] : $\begin{array}{l} \sin\phi\cdot\cos\omega - \cos\phi\cdot\sin\omega = (\sin\phi-\omega) \\ \cos\phi\cdot\cos\omega + \sin\phi\cdot\sin\omega = (\cos\phi-\omega) \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\cdot(\cos(\phi-\omega)+i\sin(\phi-\omega))$$ [10]



(Abbildung von http://www.thphys.uni-heidelberg.de; z und w hier in Exponentialschreibweise)

6.5 Potenzieren

Die Formel für das Potenzieren lässt sich, mit Hilfe der jetzt bekannten Rechenvorschrift für die Multiplikation in der Polarform, nun einfacher herleiten, da es sich hierbei nur um „mehrfaches" multiplizieren einer Zahl mit sich selbst handelt. Seit **6.3** ist bekannt, dass sich die Beträge multiplizieren und die Winkel der komplexen Zahlen addieren. Zusätzlich weiß man, dass es sich beim Potenzieren um die gleichen Beträge und gleichen Winkel handelt, so dass sich hieraus folgende Formel ergibt: $z^n=|z|^n\cdot(\cos n\cdot\phi+i\cdot\sin n\cdot\phi)$

Diese wird als **„Satz von Moivre"**[11] nach dem französischen Mathematiker Abraham de Moivre bezeichnet.

<u>So gilt:</u> Eine komplexe Zahl z wird mit n potenziert, indem man ihren Betrag $|z|$ mit n potenziert und ihren Winkel ϕ mit n multipliziert.

<u>Beispiel:</u> $z=-3+4i$, $\phi=101$, $|z|=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5$

$$z^3=5^3\cdot(\cos(3\cdot101°)+i\cdot\sin(3\cdot101°))=125\cdot((0{,}54)+i\cdot(-0{,}84))$$
$$z^3=67.5-105i$$

[9] www.fbm.fh-aalen.de/Profumit/Fachinhalte/Lernhypertext/mathematikthemen/

[10] Eigenständig hergeleitet auf Basis von: Westermann „Mathematik für Ingenieure mit Maple" Band 1, Springer Verlag Berlin 1996, Seite 203

[11] Schmittlein, Kratz: Lineare Algebra, Bayrischer Schulbuchverlag 1975, Seite 48

Das Potenzieren in der Normalform erweist sich nicht als sehr sinnvoll, da man für die Lösung gliedweise ausmultiplizieren muss und sich dieses schon bei einer Potenz von 3 als sehr komplex erweist. Gleiches gilt im Folgenden für das Radizieren.
Die Exponentialform gestaltet sich derweil wieder etwas leichter: $z^n = |z|^n \cdot e^{i \cdot n \cdot \phi}$

6.6 Radizieren

Um die Grenzen der Facharbeit nicht zu überschreiten, möchte ich mich beim „Wurzelziehen" etwas kürzer fassen und die Herleitung komprimieren.
Für das Radizieren spielt die in **6.5** schon erwähnte „Moivresche Formel" wiederum eine Rolle, da es sich hierbei um das Potenzieren mit $\frac{1}{n}$ handelt.
Doch jetzt muss man beachten, „dass die n-te Potenz einer komplexen Zahl eindeutig, die n-te Wurzel aber mehrdeutig ist."[12] Dies liegt an der Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion, da der Sinus/Kosinus vom Winkel ϕ gleich dem von $\phi + 360°$ entspricht. Für die Lösung muss man ϕ dann genau (n-1 Mal) um 360° erhöhen. So ergibt sich in der Polarform:

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\phi + k \cdot 360°}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\phi + k \cdot 360°}{n}\right)\right)$$ [13]

für ($k \in N; k = (0; 1; 2; ..; n-1)$)

für die Exponentialschreibweise gilt: $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \cdot e^{i \cdot \frac{\phi + k \cdot 2\pi}{n}}$ [14]

7. Schlusswort

Nachdem ich jetzt am Ende meiner Facharbeit angelangt bin, ziehe ich Bilanz:
Trotz anfänglicher Schwierigkeiten, die darin bestanden, dass ich vom Überangebot der Literatur zuerst die richtigen, sinnvollen und verständlichen Informationen herausfiltern musste, kam ich recht schnell zurecht und bekam eine Struktur in das Thema. Folgendermaßen bin ich vorgegangen:
Ich habe versucht das Thema „Komplexe Zahlen" dahingehend aufzuziehen, so dass man ohne Vorkenntnisse dieser Zahlenmenge einen nachvollziehbaren Eindruck über die Einführung von $\mathbb{C}$ bekommt. Ich habe die imaginäre Einheit „i" eingeführt, die unterschiedlichen Darstellungsformen der komplexen Zahlen aufgezeigt und die

---
[12]Westermann „Mathematik für Ingenieure mit Maple" Band 1, Springer Verlag Berlin 1996, Seite205
[13] http://www.koopiworld.de/pub/komplex.htm
[14]Westermann„Mathematik für Ingenieure mit Maple" Band 1, Springer Verlag Berlin 1996, Seite 202

gängigen Rechnungsmöglichkeiten hergeleitet und ausgeführt. Die Aufgabenstellung und die Vorgehensweise empfinde ich auch im Nachhinein noch als sehr sinnvoll, weil dieses ein guter Einstieg in das sehr „komplexe“ Thema ist. Denn wie ich von Maschinenbau- und Elektrotechnikstudenten erfahren habe, spielen die komplexen Zahlen auch im außermathematischen Bereich eine wichtige Rolle.
In der Physik haben sie, um ein paar Schlagworte zu nennen, eine zentrale Bedeutung in Bezug auf Schwingungsvorgänge, Wechselströmen, die Quantentheorie oder der Dirac- Gleichung.
So kann ich zusammenfassend sagen, dass es durchaus sinnvoll sein kann, sich mit den komplexen Zahlen vertraut zu machen und sie zu verwenden. Doch muss man anerkennen, dass wir zu meist im physikalischen und mathematischen Alltag auch sehr gut mit den reellen Zahlen auskommen.