Aufgaben zur vollständigen Induktion

Wenn nichts anderes angegeben ist, dann gelten die Behauptungen für $n \in \mathbb{N} = \{1; 2; 3; ...\}$.

A) **Teilbarkeit:**

1) $n^2 + n$ ist gerade (d.h. durch 2 teilbar).

2) $n^3 + 2n$ ist durch 3 teilbar.

3) $4n^3 - n$ ist durch 3 teilbar.

4) $n^3 - n$ ist durch 6 teilbar.

5) $2n^3 + 3n^2 + n$ ist durch 6 teilbar.

6) $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.

7) $3^n - 3$ ist durch 6 teilbar.

8) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar.

9) $7^{2n} - 2^n$ ist durch 47 teilbar.

10) $5^n + 7$ ist durch 4 teilbar.

11) $5^{2n} - 3^{2n}$ ist durch 8 teilbar.

12) $2^{3n} + 13$ ist durch 7 teilbar.

13) $1 < a \in \mathbb{N}$: $a^n - 1$ ist durch $a - 1$ teilbar.

14) $n^7 - n$ ist durch 7 teilbar.

15) $3^{n+1} + 2^{3n+1}$ ist durch 5 teilbar.

16) $3n^5 + 5n^3 + 7n$ ist durch 15 teilbar.

17) $3^{2n} + 7$ ist durch 8 teilbar.

18) $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

19) $n^4 - 4n^2$ ist durch 3 teilbar.

20) $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5$ ist durch 9 teilbar.

21) $4^n + 15n - 1$ ist durch 9 teilbar.

22) $5^{2n} + 24n - 1$ ist durch 48 teilbar.

23) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ ist durch 133 teilbar.

24) $a \in \mathbb{N}$: $(2a-1)^n - 1$ ist gerade.

25) $a \in \mathbb{N}$: $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}$ ist durch $a^2 + a + 1$ teilbar.

26) $a \in \mathbb{N}$: $a^{2n+1} - a$ ist durch 6 teilbar.

B) **Summenwerte:**

27) $1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$

28) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$

29) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$ bzw.
$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+...+n)^2$

30) $1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)\cdot(3n^2+3n-1)}{30}$

31) $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$

32) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{(2n-1)\cdot 2n\cdot(2n+1)}{6}$

33) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n\cdot(3n-1)}{2}$

34) $3+7+11+\ldots+(4n-1)=2n^2+n$

35) $1+2+4+8+\ldots+2^n=2^{n+1}-1$

36) $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ bzw.
$a+a\cdot q+a\cdot q^2+\ldots+a\cdot q^{n-1}=a\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

37) $1+\frac{2^0}{3^1}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{2(n-1)}}{3^n}=\left(\frac{4}{3}\right)^n$

38) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ bzw.
$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)\cdot(2n+1)$

39) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$

40) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!=(n+1)!-1$ [es gilt: $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$]

41) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}{4}$

42) $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$

43) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=2\cdot(1-\frac{1}{2^n})$

44) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

45) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

46) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$

47) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$

48) $\frac{1}{(1+3)\cdot(1+4)}+\frac{1}{(2+3)\cdot(2+4)}+\ldots+\frac{1}{(n+3)\cdot(n+4)}=\frac{n}{4\cdot(n+4)}$

49) $\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{n\cdot(n+2)}=\frac{n\cdot(3n+5)}{(n+1)\cdot(n+2)}$

50) $\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{4}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)}=\frac{(n+1)\cdot(n+4)}{(n+2)\cdot(n+3)}$

51) $\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n+1)\cdot(2n-1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

52) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ $\quad$ [es gilt: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ und $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$]

53) $\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$

54) $1\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right)+2\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)+3\cdot\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\ldots+(n-1)\cdot\ln\left(\frac{n}{n-1}\right)=n\cdot\ln(n)-\ln(n!)$

55) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n-1}{n!}=\frac{n!-1}{n!}$

56) $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$

C) **Produktwerte:**

57) $4^1\cdot 4^2\cdot 4^3\cdot\ldots\cdot 4^n=2^{n\cdot(n+1)}$

58) $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{1}{3})\cdot(1-\frac{1}{4})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ für $n\geq 2$

59) $(1-\frac{1}{2})\cdot(1-\frac{2}{3})\cdot(1-\frac{3}{4})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n})=\frac{1}{n!}$ für $n\geq 2$

60) $(1-\frac{1}{2^2})\cdot(1-\frac{1}{3^2})\cdot(1-\frac{1}{4^2})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$ für $n\geq 2$

61) $(1+\frac{1}{2^1})\cdot(1+\frac{1}{2^2})\cdot(1+\frac{1}{2^4})\cdot(1+\frac{1}{2^8})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{2^{2^n}})=\frac{2^{2^n}-1}{2^{2^n-1}}$

62) $(1+\frac{1}{n+1})\cdot(1+\frac{1}{n+2})\cdot(1+\frac{1}{n+3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{n+n})=2-\frac{1}{n+1}$

63) $(\frac{3}{1})^2\cdot(\frac{4}{2})^2\cdot(\frac{5}{3})^2\cdot(\frac{6}{4})^2\cdot\ldots\cdot(\frac{n+1}{n-1})^2=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

64) $(1+\frac{2}{1})\cdot(1+\frac{2}{2})\cdot(1+\frac{2}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{2}{n})=1+2+3+\ldots+n+(n+1)$

D) **Ungleichungen:**

65) $n^2-2n-1>0$ für $n\geq 3$

66) $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1+(2n-1)}+\frac{1}{1+(2n)}>\frac{13}{24}$

67) $\frac{1}{1+n}+\frac{1}{1+(n+1)}+\ldots+\frac{1}{1+(3n-1)}+\frac{1}{1+(3n)}>1$

68) $2^n>n+1$ für $n\geq 2$

69) $2^n>n^2$ für $n\geq 5$

70) $2^n>n^3$ für $n\geq 10$

71) $\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}<n$

72) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ für $n\geq 2$

73) $2^{n-1}\cdot(a^n+b^n)>(a+b)^n$ für $n\geq 2$; $a\neq b$; $a+b>0$

74) $n!>2^n$ für $n\geq 4$

75) $\frac{4^n}{n+1}<\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ für $n\geq 2$

76) $1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\ldots+n\cdot 2^{n-1}>(n+1)\cdot n^2$ für $n\geq 5$

77) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}$

78) $n \cdot \sqrt{n} \ > \ n + \sqrt{n}$ für $n \geq 3$

79) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \leq n^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$

80) $1 + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{3 \cdot \sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} < 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ für $n \geq 2$

81) $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$ für $x > -1$; $x \neq 0$

82) $(1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1) \cdot x$ für $0 \leq x \leq 1$

E) **(Rekursive) Folgen:**

83) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$; dann gilt: $a_n = \frac{n+1}{n}$

84) $a_1 = 2;\ a_n = a_{n-1} + n \cdot 2^n$; dann gilt: $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$

85) $a_1 = 2;\ a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (2 + \frac{1}{a_n})$; dann gilt: $\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2$

86) $a_1 = \sqrt{2};\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$; dann gilt: $a_n \leq 2$

87) Für die Glieder der Fibonacci-Folge $F_1 = 1;\ F_2 = 1;\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ gilt:
a) $1 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2}$
b) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$
c) $F_{m+n} = F_{m-1} \cdot F_n + F_m \cdot F_{n+1}$
d) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$
e) $F_{2n+3}^2 = F_n^2 \cdot F_{n+3}^2 + 4 \cdot F_{n+1}^2 \cdot F_{n+2}^2$
f) $F_n^2 + F_n \cdot F_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$

F) **Ableitungen:**

88) Für $f(x) = e^{ax+b}$ gilt: $f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}$

89) Für $f(x) = (e^x - t)^2$ gilt: $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x} - 2t \cdot e^x$

90) Für $f(x) = -(x+2) \cdot e^{-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (x + 2 - n) \cdot e^{-x}$

91) Für $f(x) = x^2 \cdot e^x$ gilt: $f^{(n)}(x) = \big(x^2 + 2nx + n(n-1)\big) \cdot e^x$

92) Für $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{(1+x)^n} - (n-1)! \cdot \frac{1}{(1-x)^n}$

93) Für $f_n(x) = x^{-n}$ gilt: $f_n'(x) = -n \cdot x^{-n-1}$

94) Für $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot \frac{a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

95) Für $f(x) = \frac{x}{2-x}$ gilt: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot n! \cdot \frac{1}{(x-2)^{n+1}}$

96) Für $f(x) = \sinh{(a \cdot x)}$ gilt: $f^{(2n)}(x) = a^{2n} \cdot \sinh{(a \cdot x)}$ $\left[\ \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}\ \right]$

97) Für $f(x) = \sin{(a \cdot x)}$ gilt: $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cdot a^{2n} \cdot \sin{(a \cdot x)}$

G) **Sonstiges:**

98) Zeige: n Elemente kann man auf $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ verschiedene Arten anordnen.

99) Wieviele Diagonalen gibt es in einem ebenen, konvexen n-Eck?
Zeige: es gibt $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ Diagonalen.

100) Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem n-Eck?
Zeige: die Winkelsumme in einem konvexen n-Eck ist $(n-2)\cdot 180°$.

101) Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge einer n-elementigen Menge?
Zeige: die Potenzmenge enthält 2^n Elemente.

102) Zeige das „Schubfachprinzip": Werden n Objekte in k Fächer gegeben, wobei $k < n$ ist, dann enthält mindestens eines der Fächer mehr als eines der Objekte.

103) p teilt $n^{p-1} - 1$, wenn p prim ist und $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$ gilt (sogenannter „kleiner Fermat").

104) Zeige $1010...1010_{(2)} = \frac{2\cdot(4^n-1)}{3}$
Dabei steht die Zifferngruppe $10_{(2)}$ genau n-mal hintereinander (im Zweiersystem).

105) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n\cdot(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

106) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1+(-1)^n}{2} \\ 0 & \frac{1+(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

107) Zeige: mit der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \bullet \mathbf{A} \bullet \ldots \bullet \mathbf{A}}_{n \text{ Stück}} = 3^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$