Inhaltsverzeichnis

Diese Facharbeit wurde von Christoph Bruns erstellt und ist urheberrechtlich geschützt!

Diese Facharbeit wurde von Christoph Bruns erstellt und ist urheberrechtlich geschützt!

1 Einleitung

In der Realität gibt es verschiedene Wachstumsarten. Man unterscheidet dabei in den Bereichen Natur, Technik oder Wirtschaft hauptsächlich zwischen dem linearen, exponentiellen, beschränkten und logistischen Wachstum. Allen Wachstumsarten liegen Differenzialgleichungen zugrunde. Während die ersten beiden Typen potenziell alle Grenzen überschreiten, behandelt das beschränkte und das logistische Wachstum Dynamiken mit beschränkten Ressourcen. In dieser Arbeit wird der Begriff des logistischen Wachstums und der zugehörigen Differenzialgleichung anhand einiger Beispiele erläutert. Das primäre Beispiel wird dabei das Wachstum der Weltbevölkerung sein. Desweiteren wird auch ein Vergleich zwischen dem exponentiellen Wachstum hergestellt. Dabei werden Beispiele genannt, in denen beide Wachstumsarten auftreten. Es wird zusätzlich noch gezeigt, wann das exponentielle Wachstum scheitert. Außerdem beinhaltet diese Arbeit einige Aufgaben samt Lösungen zum logistischen Wachstum.

2 Erläuterung des Begriffs des Logistischen Wachstums und dessen Differenzialgleichung anhand des Weltbevölkerungswachstums

2.1 Erläuterung zum logistischen Wachstumsmodell

In einem endlichen System kann weder das lineare, noch das exponentielle Wachstum unbegrenzt andauern. Irgendwann ist eine Grenze erreicht, die nicht überschritten werden kann. Diese Grenze wird meistens durch äußere Umwelteinflüsse, wie begrenztes Nahrungs- oder Ausbreitungsangebot bestimmt. Die Population der Menschen ist die einzige, welche bis jetzt ein ungehindertes exponentielles Wachstum aufweist. Dieses exponentielle Wachstum lässt sich nur verwirklichen, wenn keine natürlichen Feinde und kein Nahrungsmangel vorhanden sind. Desweiteren muss ein unbegrenzter Raum für die Ausbreitung zur

Verfügung stehen. Aber die Frage liegt nahe, ob man beim Bevölkerungswachstum wirklich von exponentiellem Wachstum ausgehen kann, zumal irgendwann eine Begrenzung durch die Erdoberfläche sowie der Nahrung auftreten muss.

2.1.1 Das Scheitern des exponentiellen Wachstumsmodell bei der Weltbevölkerungsprognose

Um nachzuprüfen, ob man beim Bevölkerungswachstum wirklich von exponentiellem Wachstum ausgehen kann, berechne man folgendes Beispiel. K(t) soll die Erdbevölkerung zur Zeit t sein. Nach Schätzungen belief sich ihre Größe im Jahre 1961 auf etwa 3 Milliarden Menschen mit einer jährlichen Durchschnittszuwachsrate von 2%.[1]

Daraus folgt die exponentielle Wachstumsfunktion K mit $K(t) = 3.000.000.000 \cdot e^{\ln(1,02)\cdot(t-1961)}$. Die Bildung einer solchen exponentiellen Wachstumsfunktion, kann man in Abschnitt 3.1 genauer nachvollziehen. Nun kann man diese Formel mit vorliegenden Daten vergleichen, soweit sie Populationen der Vergangenheit betreffen. Das Resultat ist, dass diese Formel mit überraschender Genauigkeit die geschätzte Größe der Erdbevölkerung für den Zeitraum von 1700 bis 1961 wiedergibt. Ihre etwa alle 35 Jahre erfolgte Verdopplung ist nach dieser Gleichung auch etwa alle 35 Jahre zu erwarten. Denn dies geschieht in einer Zeit $T{=}t{-}1961$, für die $e^{\ln(1,02)\cdot T} = 2$ ist. Logarithmieren führt dann zu $\ln(1,02) \cdot T = \ln(2)$ was $T \approx 35,0028$ ergibt. Diese Formel prophezeit aber für das Jahr 2510 eine Bevölkerungszahl von 157985 Milliarden, für das Jahr 2635 eine Zahl von 1877747 Milliarden und für das Jahr 2670 sogar eine Zahl von 3755286 Milliarden. Die Erde hat eine ungefähre Gesamtoberfläche von $5,1 \cdot 10^{14} \mathrm{m}^2$.[2] Das würde für das Jahr 2635 bedeuten, dass jeder Mensch nur noch einen Platz von $0,27\ \mathrm{m}^2$ zur Verfügung hätte. Im Jahr 2670 müssten sich die Menschen schon gegenseitig auf den Schultern tragen. Dies kann der Realität nicht gerecht werden.

---

[1] vgl.: [11]
[2] vgl.: [17]

Ein mathematisches Modell, in dem Bedingungen wie z.B. Nahrungs- oder Platzmangel berücksichtigt werden, stammt von dem Belgier Pierre-Francois Verhulst (1804 -1849). Er nannte dieses Modell „logistisches Wachstum". „Gründe für diese Namensgebung sind nicht bekannt."[1] Durch eine mit steigender Population fallende Wachstumsrate sorgt er mit diesem Modell dafür, dass schließlich ein stabiles Gleichgewicht zwischen Sterberate und Zuwachsrate erreicht wird. Dem Modell liegt eine Differenzialgleichung zugrunde.

2.2 Erläuterung des Begriffs der Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung, oft abgekürzt als DGL, was im Weiteren auch verwendet wird, ist eine Gleichung, die eine Funktion *f(x)* und eine oder mehrere Ableitungen dieser Funktion enthält. „Um eine DGL zu lösen, muss eine Funktion f gefunden werden, die der DGL genügt."[2] Differenzialgleichungen werden oft benötigt, um Vorgänge zu beschreiben, bei denen die Veränderung einer Größe durch sie selbst bestimmt wird. Die Ordnung einer DGL wird durch die höchstvorkommende Ableitung in der Gleichung gegeben. Die gesuchte Funktion f kann von einer Variablen oder von mehreren abhängen. Im ersten Falle spricht man von einer gewöhnlichen, im letzteren Falle von einer partiellen DGL.

2.3 Herleitung der Differenzialgleichung des Logistischen Wachstums sowie ihrer Lösung

S ist der maximale Bestand. Diesen maximalen Bestand nennt man Sättigungsgrenze oder auch Sättigungsschranke. Man erhält die DGL des logistischen Wachstums durch die folgenden Überlegungen:

Beim exponentiellen Wachstum ist die innerhalb einer Zeiteinheit anfallende Ab- bzw. Zunahme proportional zum momentanen Bestand. Diese Ab- bzw. Zunahme wird durch die 1. Ableitung bestimmt, da die

[1] vgl.: [2]

1. Ableitung das Änderungsverhalten der Menge, abhängig von der Zeit angibt. Daraus folgt:

$$f'(t) \sim f(t)$$

DGL des exponentiellen Wachstums:

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

k ist dabei der Proportionalitätsfaktor. Beim beschränkten Wachstum, ist die Ab- bzw. Zunahme proportional zum verfügbaren Restbestand einer das Wachstum begrenzenden Kapazität. Der Restbestand $S - f(t)$ wird „Sättigungsmanko“ genannt.

$$f'(t) \sim S - f(t)$$

DGL des beschränkten Wachstums:

$$f'(t) = k \cdot [S - f(t)]$$

Beim logistischen Wachstum ist der Zuwachs zum momentanen Bestand und zum verfügbaren Restbestand einer das Wachstum begrenzenden Kapazität proportional. Das bedeutet, dass $f'(t)$ proportional zum Produkt von $f(t)$ und $[S - f(t)]$ ist.
Dies ergibt:

$$f'(t) \sim [S - f(t)] \cdot f(t)$$

Die „DGL des logistischen Wachstums“ lautet also:

$$f'(t) = k \cdot [S - f(t)] \cdot f(t)$$

---

[2] vgl.: [8]

Es handelt sich bei der DGL des logistischen Wachstums um eine DGL 1. Ordnung, da die höchstvorkommende Ableitung die 1. Ableitung ist. Desweiteren handelt es sich um eine gewöhnliche DGL, da die gesuchte Funktion f nur von einer Variablen, in diesem Fall t, abhängig ist.

Aus dieser DGL ergibt sich:

$$f'(t) = k \cdot [S - f(t)] \cdot f(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{[S - f(t)] \cdot f(t)} = k$$

Um die Funktion $\frac{f'(t)}{[S - f(t)] \cdot f(t)}$ integrieren zu können, wendet man Partialbruchzerlegung an. Um ein leichteres Rechnen zu erlangen, wird $f'(t)$ durch 1 ersetzt. Daraus folgt:

$$\frac{1}{[S - f(t)] \cdot f(t)} = \frac{A}{f(t)} + \frac{B}{S - f(t)}$$

Nun werden A und B berechnet, indem man zunächst den Hauptnenner bildet und folgende Gleichung erhält:

$$\frac{1}{[S - f(t)] \cdot f(t)} = \frac{A}{f(t)} + \frac{B}{S - f(t)} = \frac{A(S - f(t)) + B \cdot f(t)}{[(S - f(t)] \cdot f(t)}$$

$$= \frac{AS - A \cdot f(t) + B \cdot f(t)}{[(S - f(t)] \cdot f(t)} = \frac{A \cdot S + (B - A) \cdot f(t)}{[(S - f(t)] \cdot f(t)}$$

Nun werden die Zähler auf beiden Seiten gleichgesetzt. Dies führt auf

$1 = A \cdot S + (B - A) \cdot f(t)$.

Daraus folgt 1. ($B - A = 0$) und 2. ($A \cdot S = 1$) für alle $t \in \mathbb{R}$. Aus 1. folgt $B = A$ und aus 2. folgt $A = \frac{1}{S}$. Dadurch erhält man

$$\frac{f'(t)}{[S - f(t)] \cdot f(t)} = \frac{f'(t)}{S \cdot [S - f(t)]} + \frac{f'(t)}{S \cdot f(t)} = k \quad \text{bzw.} \quad \frac{f'(t)}{S \cdot f(t)} - \frac{-f'(t)}{S \cdot [S - f(t)]} = k \;.$$

Nun bildet man das unbestimmte Integral auf beiden Seiten dieser Gleichung

$$\frac{1}{S}\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt-\frac{1}{S}\int\frac{-f'(t)}{S-f(t)}dt=k\int dt\ .$$

Dies führt zu den Stammfunktionen

$$\frac{1}{S}\ln|f(t)|-\frac{1}{S}\ln|S-f(t)|=kt+c_1$$

wegen $f>0$ und $S-f>0$ kann man die Betragstriche weglassen. Nun wird auf beiden Seiten $(-S)$ multipliziert was

$$\ln(S-f(t))-\ln(f(t))=-Skt-c_1$$

ergibt. Durch Anwendung des Logarithmengesetzes $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$ [1]

erhält man

$$\ln\left(\frac{S-f(t)}{f(t)}\right)=-Skt-Sc_1\ .$$

Das Exponieren der Gleichung zu e führt auf

$$\frac{S-f(t)}{f(t)}=e^{-Skt-Sc_1}\quad \text{bzw.}\quad \frac{S-f(t)}{f(t)}=c_2\cdot e^{-Skt}\quad \text{mit } c_2=e^{-Sc_1}>0\ .$$

Dadurch erhält man als Ergebnis, dass alle Funktionen f mit

$f(t)=\frac{S}{1+c_2\cdot e^{-Skt}}$ Lösungen der DGL des logistischen Wachstums sind.

Da es für die Berechnung des logistischen Wachstums einfacher ist, eine Form zu haben, in die man den Anfangswert einsetzen kann, setzt man

$f(0)=\frac{S}{1+c_2}=a$ bzw. $c_2=\frac{S-a}{a}$ und es ist

$$f(t)=\frac{a\cdot S}{1+\frac{S-a}{a}\cdot e^{-Skt}}=\frac{a\cdot S}{a+(S-a)\cdot e^{-Skt}}\ .$$

[1] vgl.: [1]

Da immer $S > 0$ und $c_2 > 0$ gilt, folgt mit $a = \frac{S}{1+c_2}$ die Beziehung

$0 < a < S$.[1]

2.4 Das logistische Wachstumsmodell bei der Weltbevölkerungsprognose

Dies ist die momentane „UN-Weltbevölkerungslangzeitprognose“:

Jahr	1990	2000	2025	2050	2100	2150
Anzahl in Mrd.	5,3	6,23	8,47	10,02	11,19	11,54

Die UN geht von einer Sättigungsgrenze von S=11,6 Milliarden Menschen aus. Diese würde nach Schätzungen kurz nach dem Jahr 2200 erreicht sein.[2] Der Graph dazu sieht wie folgt aus:
siehe Anhang Material (3)

Wenn man sich diese Werte ansieht, erkennt man, dass die UN zur Berechnung dieser Prognose nicht das Modell des exponentiellen Wachstums verwendet hat. Es liegt die Vermutung nahe, dass das Modell des logistischen Wachstums verwendet wurde, da der Graph dem Schaubild eines typischen logistischen Wachstums entspricht. Um diese These zu überprüfen, ermittelt man zunächst einmal k mit der logistischen Gleichung

$$f(Vt) = \frac{a \cdot S}{a + (S-a) \cdot e^{-Sk(\Delta t)}}$$

Man setzt für $f(0)=a$ den Anfangswert. In diesem Fall liegt er im Jahr $t_0 = 1990$ bei 5,3 Milliarden. Daraus folgt $a=5{,}3$. Nun muss man einen Wert für t einsetzen. Dazu bietet sich z.B. das Jahr 2000 an. Die Zeitdifferenz zwischen dem Jahr 2000 und dem Anfangswertjahr 1990 er-

[1] vgl.: [2]
[2] vgl.: [15]

gibt sich aus $\Delta t = t - t_0$; folglich 10. Somit erhält man zur Berechnung von k folgende Gleichung:

$$\frac{5,3 \cdot 11,6}{5,3 + (11,6 - 5,3) \cdot e^{-11,6 \cdot 10 \cdot k}} = 6,23 \quad \text{bzw.} \quad \frac{61,48}{5,3 + 6,3e^{-116k}} = 6,23.$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, erhält man $k \approx 0,0027706$. Daraus folgt eine Gleichung, in die man nun ein beliebiges t einsetzen kann.

$$f(t) = \frac{61,48}{5,3 + 6,3e^{-0,3213896kt}}.$$

Überprüft man nun die prognostizierten Werte der UN für die Jahre 2025, 2050, 2100 und 2150, so erhält man annähernd die gleichen Ergebnisse. Man erhält f(2025)=8,37, f(2050)=9,89, f(2100)=11,21 und f(2150)=11,52. Die UN hat also das logistische Wachstum für ihre Bevölkerungsprognose angewandt. Im Vergleich zum exponentiellem Wachstum stellt das logistische Wachstum zwar ein realistischeres Modell dar, letztlich aber dennoch eine starke Vereinfachung der realen Verhältnisse. Es handelt sich beim logistischen Wachstum also nur um ein mathematisches Modell, welches niemals alle realen Bedingungen, speziell beim Bevölkerungswachstum, das von sehr vielen Bedingungen abhängig ist, berücksichtigen kann.

3 Vergleich zwischen dem exponentiellen- und logistischen Wachstum anhand des Bakterienwachstums

3.1 Merkmale des exponentiellen Wachstums

Das Hauptmerkmal des exponentiellen Wachstums, auch natürliches Wachstum genannt, ist, dass die Zu- bzw. Abnahme in einem bestimmten Zeitintervall proportional zum momentanen Bestand ist. Aus diesem Grund wird die Zu – bzw. Abnahme häufig auch in Prozent angegeben, wie z.B. beim Bevölkerungswachstum. Man geht von exponentiellem Wachstum in solchen Bereichen aus, in denen das Wachstum durch keine äußeren Einflüsse wie z.B. Platzmangel o.ä. gestört wird. Darunter fallen die Kapitalvermehrung durch den Zinseszins, die Bakterienvermehrung, der Zerfall von radioaktiven Stoffen und der Abbau von Gift im Blut, um ein paar Beispiele zu nennen. Im Folgenden wird das exponentielle Wachstum anhand der Bakterienvermehrung genauer vorgestellt. Wenn man davon ausgeht, dass sich die Bakterien unbegrenzt ausbreiten können, kann man deren Wachstum mit folgender Gleichung bestimmen:

$$f(t) = c \cdot a^t$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$, $f(t)$ der Bestand zum Zeitpunkt t und a der Wachstumsfaktor ist.

Es soll folgende Messtabelle vorliegen:

Zeit t in Stunden	0	1	2	3
Bestand f(t)	1	4	16	64

Die Messtabelle zeigt, dass sich die Bakterien pro Stunde vervierfachen. Daraus ergibt sich, dass der Wachstumsfaktor $a = 4$ sein muss. Da der Anfangsbestand eine Bakterie war, ist $c = 1$. Somit erhält man für dieses Wachstum folgende Gleichung:

$$f(t) = 1 \cdot 4^t$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist man nun in der Lage, den Bestand in einer beliebigen Zeit t zu errechnen. Der Graph zu diesem Wachstum sieht wie folgt aus: *siehe Anhang Material (1)*
So sieht ein typischer Graph des exponentiellen Wachstums aus.

3.2 Merkmale des Logistischen Wachstums

Wenn man davon ausgeht, dass sich die Bakterien nicht ungehindert vermehren können, da sie nur eine begrenzte Nahrung zur Verfügung haben, hilft die Gleichung für das exponentielle Wachstum nicht mehr weiter, da das exponentielle Wachstum stets unbeschränkt verläuft. Dadurch, dass jede einzelne Bakterie weniger Nahrung bekommt, je mehr Bakterien vorhanden sind, verringert sich auch die Vermehrungsrate. Daraus folgt, dass das Wachstum vom momentanen Bestand sowie vom „Sättigungsmanko“ abhängig ist. Mit dem „Sättigungsmanko“ ist die Differenz zwischen dem momentanen Bestand und der Sättigungsgrenze gemeint. Die Sättigungsgrenze ist der maximale Bestand. Das logistische Wachstum ist ein Modell, das die Bedingung der Sättigung berücksichtigt. Beim logistischen Wachstum ist der Zuwachs zum momentanen Bestand und zum verfügbaren Restbestand einer das Wachstum begrenzenden Kapazität proportional. Das logistische Wachstum ist also eine Mischung aus dem exponentiellen- und dem beschränkten Wachstum. Die Lösung der DGL des logistischen Wachstums lautet wie folgt:

$$f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S - a) \cdot e^{-Skt}}$$

Dabei ist S die Sättigungsgrenze und a der Anfangsbestand. Wenn man von einem maximalen Bestand von 1.000.000 Bakterien ausgeht, dann ist S=1000000. Aus der Bedingung $f(3) = 64$, siehe Tabelle in 2.2, folgt:

$$64 = \frac{1 \cdot 1000000}{1 + (999999) \cdot e^{-1000000 \cdot 3 \cdot k}}$$ daraus ergibt sich $k \approx 0{,}000001386$.

Man erhält also damit folgende Gleichung:

$$f(t) = \frac{1000000}{1 + (999999) \cdot e^{-1{,}3863 \cdot t}}$$

Diese Gleichung berücksichtigt nun die Sättigung. Der typische Graph dieser logistischen Gleichung sieht wie folgt aus:
siehe Anhang Material (2)

3.2.1 Eigenschaften der logistischen Gleichung

Es ist ersichtlich, dass, solange Wachstum vorliegt und daher f(t) notwendig kleiner als S ist, die relative Wachstumsrate gegen Null strebt, wenn f(t) gegen S konvergiert. Ist der Bestand f(t) im Vergleich zur Sättigungsgrenze klein, dann verläuft das Wachstum annähernd exponentiell. f(t) konvergiert asymptotisch gegen S. Die Wachstumskurve hat aufgrund der logistischen Gleichung einen Wendepunkt. Im Wendepunkt ist die Änderungsrate maximal und es liegt stets der halbe Bestand vor, da nach der DGL des logistischen Wachstums folgendes gilt:

Da f wächst, ist die Ableitung größer Null

$f' = k \cdot f \cdot (S\text{-}f) > 0$.

Dadurch erhält man unter Anwendung der Produktregel $f(x)=g(x)\cdot h(x) \Rightarrow f'(x)=g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$ [1] die zweite Ableitung

$f'' = k \cdot f' \cdot (S-f) + k \cdot f \cdot (-f')$ bzw. $f'' = k \cdot f' \cdot (S-2f)$.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die 2. Ableitung null ist:

$f'' = k \cdot f' \cdot (S-2f) = 0$

Wenn einer der Faktoren null ist, ist das Ergebnis null. Daraus ergibt sich die Bedingung $S-2f=0$, welche zu $f=\frac{S}{2}$ führt.

Die hinreichende Bedingung für die Existenz eines Wendepunktes ist der Vorzeichenwechsel.

[1] vgl.: [1]

Für $f < \frac{S}{2}$ ist $f'' > 0$ und für $f > \frac{S}{2}$ ist $f'' < 0$. Folglich liegt ein Vorzeichenwechsel von plus nach minus vor. Damit ist bewiesen, dass im Wendepunkt stets der halbe Bestand vorliegt.

Das logistische Wachstum kommt unter anderem bei der Verbreitung einer Innovation, wie z.B. des Automobils, bei vielen Wachstumsvorgängen in der Natur und der Verbreitung eines Gerüchts oder Virus vor.

Wenn also ein Wachstum anfangs annähernd exponentiell verläuft, folgt daraus keineswegs, dass ein exponentielles Wachstum vorliegen muss. Es kommt immer darauf an, ob das Wachstum durch irgendeine Bedingung begrenzt ist. In der Realität trifft das exponentielle Wachstum oft nicht zu. Dies wurde beim Wachstum der Weltbevölkerung recht deutlich.

4 Aufgaben

LS (2001) S. 296 Nr.7

Aufgabenstellung: *siehe Anhang*

a)

Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man vom logistischen Wachstum aus folgenden Gründen aus: Einerseits wird die Grippe zur Zeit t um so häufiger an gesunde Indianer weitergegeben, je größer die Anzahl $K(t)$ der schon angesteckten Indianer ist. Diese Anzahl nimmt also mit der Zeit zu. Sie kann maximal auf 5000 steigen. Andererseits kann sich mit der Grippe nur eine bestimmte Anzahl von Indianern anstecken, die noch gesund sind. Also sinkt die Wahrscheinlichkeit, dass ein infizierter Indianer zu einem gewissen Zeitpunkt einen Gesunden ansteckt, je mehr Indianer erkrankt sind. Dies liegt daran, dass die Indianer zu dem Zeitpunkt öfter auf schon infizierte Indianer treffen als auf gesunde. Die Anzahl der gesunden Indianer ist die Differenz von 5000 und der Anzahl $K(t)$ der kranken Indianer. Die Zuwachsrate (Änderungsrate) zur Zeit t ist demnach sowohl zum Bestand $K(t)$ als auch zum Sättigungsmanko $5000 - K(t)$ proportional. Dies rechtfertigt die Annahme, dass ein logistisches Wachstum vorliegt.

b)

Maximal können 5000 Indianer erkranken. Daraus folgt, dass die Sättigungsgrenze bei $S=5000$ liegt. Zum Zeitpunkt $t=0$ gab es einen erkrankten. Daraus folgt: $a=f(0)=1$. Mit der DGL des logistischen Wachstums

$$f`(t) = k \cdot f(t) \cdot (5000 - f(t))$$

und deren Lösung $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S-a) \cdot e^{-Skt}}$ ergibt sich

$$f(t) = \frac{1 \cdot 5000}{1 + (5000-1) \cdot e^{-5000kt}} = \frac{5000}{1 + (4999) \cdot e^{-5000kt}}.$$

Nach 4 Wochen sind 300 Indianer infiziert. Daraus ergibt sich die Bedingung $f(4) = 300$. Dies führt zu

$$300 = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-20000k}}.$$

Löst man diese Gleichung nach k auf, erhält man $k \approx 0{,}000288$.

Die gesuchte Funktion lautet also

$$K(t) = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-5000 \cdot 0{,}000288t}} = \frac{5000}{1 + 4999 \cdot e^{-1{,}44t}}$$

Der Graph dieser Funktion sieht wie folgt aus:

siehe Anhang Material (4)

Um auszurechnen, nach welcher Zeit die Hälfte der Stammesbewohner erkrankt ist, rechnet man mit $f(t) = \frac{S}{2}$.

Daraus folgt die Gleichung $\frac{S}{2}=\frac{5000}{1+4999\cdot e^{-1,44t}}$ bzw.

$2500=\frac{5000}{1+4999\cdot e^{-1,44t}}$.

Daraus ergibt sich $t=5,91$.

Die Hälfte des Stammes ist also nach ungefähr 6 Wochen erkrankt.

c)

2 Monate entsprechen ungefähr 9 Wochen. Also muss man mit der aus Aufgabenteil b) berechneten Funktion $K(t)$ den Wert für 9 Wochen berechnen.

$K(9)=\frac{5000}{1+4999\cdot e^{-1,44\cdot 9}}=4941,881$

Dies entspricht einer durchschnittlichen Ansteckung von $\frac{4942}{9}=549$ Indianern pro Woche.

<u>LS (2001) S. 296 Nr.10</u>

Aufgabenstellung: *siehe Anhang*

a)

Es liegen folgende Bedingungen vor:

$f(0)=1250=a$

$f(4)=6600$

$f(8)=17700$

$S=59000$

Man nimmt den Ansatz über die Lösung der Differentialgleichung des logistischen Wachstums

$f(t)=\frac{a\cdot S}{a+(S-a)\cdot e^{-Skt}}$. Daraus folgt

$f(t)=\frac{73750000}{1250+57750\cdot e^{-59000kt}}$.

Aus der Bedingung f(4)=6600 folgt $k \approx 0{,}00000746$.

Aus der Bedingung f(8)=17700 folgt $k \approx 0{,}00000633$.

Daraus ergibt sich der gemittelte Wert für k von 0,00000689.

Nun erhält man die gesuchte Funktion f mit

$$f(t) = \frac{73750000}{1250 + 57750 \cdot e^{-0{,}4067t}}.$$

Der Graph dieser Funktion sieht wie folgt aus:

siehe Anhang Material (5)

b)

Um auszurechnen wie viele Roboter im Jahr 2005 im Betrieb sein werden, rechnet man wie folgt:

$$f(25) = \frac{73750000}{1250 + 57750 \cdot e^{-0{,}4067 \cdot 25}} = 58895{,}52$$

Es werden also ca. 58900 Roboter im Betrieb sein.

Um zu bestimmen, in welchem Jahr 30000 Roboter im Betrieb sein werden, verwendet man folgenden Ansatz und löst diesen nach t auf.

$$30000 = \frac{73750000}{1250 + 57750 \cdot e^{-0{,}4067t}}$$

Damit ergibt sich $t=9{,}508$.

Im Jahre 1989 werden also ungefähr 30000 Roboter in Betrieb sein.

c)

Vergleich:

Mit der aus Teilaufgabe a) erhaltenen Funktion f mit

$f(t) = \frac{73750000}{1250 + 57750 \cdot e^{-0{,}4067t}}$ erhält man die unten aufgeführte

Wertetabelle für die Jahre 1990 bis 1999:

Jahr	**Roboter laut f(t)**	**Tatsächliche Roboter**
1990	32936	28240
1991	38640	34140
1992	43676	39390
1993	47827	43715
1994	51058	48840
1995	53463	56175
1996	55194	66600
1997	56410	75625
1998	57250	85565
1999	57823	96100

Daraus ergeben sich die Graphen: *siehe Anhang Material (6) und (7)*

Wenn man beide Tabellen und Graphen miteinander vergleicht, fällt auf, dass die vermeintliche Sättigungsgrenze von 59000 Industrierobotern für das Jahr 20xx, von der man im Jahre 1988 ausging, bereits im Jahre 1996 überschritten wurde. Besonders auffällig ist, dass man ab den neunziger Jahren von beschränktem Wachstum ausging.
Dies war aber in der Realität anders. In den Jahren 1990 bis 1999 stieg die Anzahl der Industrieroboter exponentiell an. Dieses Wachstum lässt sich durch die Funktion f mit $f(t) = c \cdot a^t$ genauer beschreiben. Aus der gegebenen Tabelle erhält man für die Wachstumskonstante einen gemittelten Wert von $a=1,15$. Daraus ergibt sich eine Funktion f mit $f(t) = 28240 \cdot 1,15^t$. Ein möglicher Grund dafür, dass man 1988 von einer Sättigungsgrenze ausging, die deutlich unter der bereits erreichten Anzahl an Industrierobotern liegt, wäre, dass man nicht mit der Wiedervereinigung Deutschlands gerechnet hat. Durch die Wiedervereinigung wurde eine Vielzahl an neuen Robotern gebraucht. Ein weiterer möglicher Grund ist, dass man nicht mit einem derartigen Erfolg der Roboter

gerechnet hat. Man wusste vielleicht noch nicht, wo man sie überall einsetzen kann.

LS (2001) S. 297 Nr.14

Aufgabenstellung: *siehe Anhang*

a)

Funktionsanpassung unter Annahme exponentiellen Wachstums.

Da man von exponentiellem Wachstum ausgeht ist der Ansatz $y = c \cdot e^{kt}$ mit $t \geq 0$ zu wählen. Durch ungefähres Abschätzen des Graphen Fig.3, siehe Anhang, erhält man folgende Wertetabelle:

t	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
y	10000	30000	100000	110000	200000	480000	700000	1100000

Um ein leichteres Rechnen mit diesen Werten zu erlangen, formt man diese Daten um, in dem man das Jahr 1991 als $t=0$ deklariert und die y-Werte durch 200000 dividiert.

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0,05	0,1	0,5	0,6	1	2,4	3,5	5,5
ln(y)	-3	-2,3	-0,7	-0,5	0	0,9	1,3	1,7

Durch das Umrechnen $\ln(y) = k \cdot t + \ln(c)$ erkennt man, dass die gegebenen Messpunkte in einem $(t|\ln(y))$-Koordinatensystem näherungsweise auf einer Geraden mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b liegen. Die Steigung m der Ausgleichsgeraden ist

$$m = \frac{1,7-(-3)}{7} = \frac{4,7}{7} = 0,672$$

Der y-Achsenabschnitt liegt bei $b=-3$. Die Gleichung der Ausgleichsgeraden lautet also

$$y = mx + b$$
$$f(x) = 0,672x - 3$$

Hieraus folgt $k = m = 0,672$ und $c = e^{-3} = 0,05$

Somit erhält man als Näherungsfunktion f mit

$f(t) = 0,05 \cdot e^{0,672t}$

Der folgende Graph zeigt diese Funktion im Vergleich mit den original Messdaten: *siehe Anhang Material (8)*

b)

Funktionsanpassung unter Annahme logistischen Wachstums.

Da man vom logistischen Wachstum mit der Funktion f der Form $f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S-a) \cdot e^{-Skt}}$ ausgeht, muss man die y-Werte zunächst einmal umrechnen. Dies macht man wie folgt

$y^* = \ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right)$. Dabei sei die Sättigungsgrenze zunächst einmal 3000000. Da die Werte umgeformt wurden, um ein leichteres Rechnen mit diesen Werten zu erlangen, muss man auch diese Sättigungsgrenze umformen. Daraus folgt $\frac{3000000}{200000} = 15$. Die sich daraus ergebene Sättigungsgrenze mit der man weiterrechnet ist $S=15$. Daraus ergibt sich folgende Wertetabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0,05	0,1	0,5	0,6	1	2,4	3,5	5,5
y*	3	2,3	0,7	0,5	-0,06	-1	-1,5	-2,2

Wenn man die Punkte in ein Koordinatensystem einträgt, erkennt man, dass man eine Ausgleichsgerade konstruieren kann. Die Steigung m der Ausgleichsgeraden muss $m = -\frac{3-(-2,2)}{7} = -0,743$ betragen. Der y-Achsenabschnitt liegt bei b=3. Daraus ergibt sich folgende Funktion für die Ausgleichsgerade $f(x) = -0,743x + 3$. Aus $k = -\frac{m}{S} = 0,0495$ ergibt sich die gesuchte Näherungsfunktion

$$f(t) = \frac{0,75}{0,05 + 14,95e^{-0,743t}} \quad .$$

Man führt diese Berechnung für eine Sättigungsgrenze von 20 Millionen durch, also umgerechnet S=100, und erhält folgende Tabelle:

t	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0,05	0,1	0,5	0,6	1	2,4	3,5	5,5
y*	3	2,3	0,69	0,5	-0,01	-0,9	-1,3	-1,76

Daraus ergibt sich durch die gleichen Rechenschritte folgende Näherungsfunktion

$$f(t) = \frac{5}{0,05 + 99,95e^{-0,667t}} .$$

Die durch die Funktionsanpassung unter Annahme des exponentiellen Wachstums hergeleitete Näherungsfunktion beschreibt das bisherige Wachstum relativ gut, da aber die Anzahl der Einwohner Deutschlands begrenzt ist, und somit auch die Anzahl der maximalen Internetrechner Deutschlands, muss man vom logistischen Wachstum ausgehen.

c)

Dies ist die aktuelle Statistik der Internetrechner von 99-2003.[1]

t	1999	2000	2001	2002	2003
y	11200000	20100000	27300000	31800000	39000000

bzw.

t	8	9	10	11	12
y	56	100,5	136,5	159	195
y*	-4,22	-4,99	-5,47	-5,76	-6,21

[1] vgl.: [9]

Der Graph mit allen Daten von 1991 bis 2003 sieht wie folgt aus:
siehe Anhang Material (9)

Laut einer Studie des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung liegt die Sättigungsgrenze der Internetrechner in Deutschland bei ungefähr 64 Millionen.[1] Wenn man also eine erneute Funktionsanpassung für das logistische Wachstum mit $S=320$ vornimmt, erhält man folgende Näherungsfunktion

$$f(t)=\frac{16}{0{,}05+319{,}95e^{-0{,}7675t}} \quad .$$

Die aktualisierte Näherungsfunktion, die sich durch die Funktionsanpassung unter Annahme von exponentiellem Wachstum ergibt, lautet

$$f(t)=0{,}05\cdot e^{0{,}689t} \quad .$$

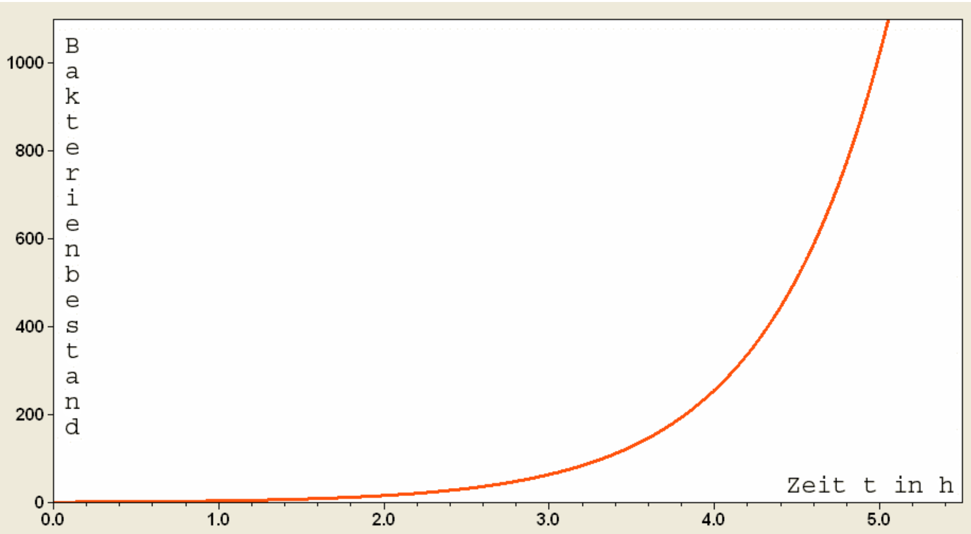
5 Schluss

Anfangs fiel mir der Einstieg in dieses Thema relativ schwer. Es war ein völlig neues Gebiet für mich, in das ich mich erst mal hineinarbeiten musste. Dies wurde zudem noch dadurch erschwert, dass ich nicht das geeignete Material in Bibliotheken gefunden habe. Meine Materialrecherche bezog sich also fast ausschließlich auf das Internet. Leider musste ich feststellen, dass man seine Quellen im Internet schon sehr gut untersuchen muss, da ich bei meiner Recherche nicht nur einmal auf falsche Informationen gestoßen bin. Schlussendlich bin ich aber froh, dieses Thema bearbeitet zu haben, da ich jetzt in der Lage bin, ein relativ häufig vorkommendes Wachstum genauer zu beschreiben und zu untersuchen.

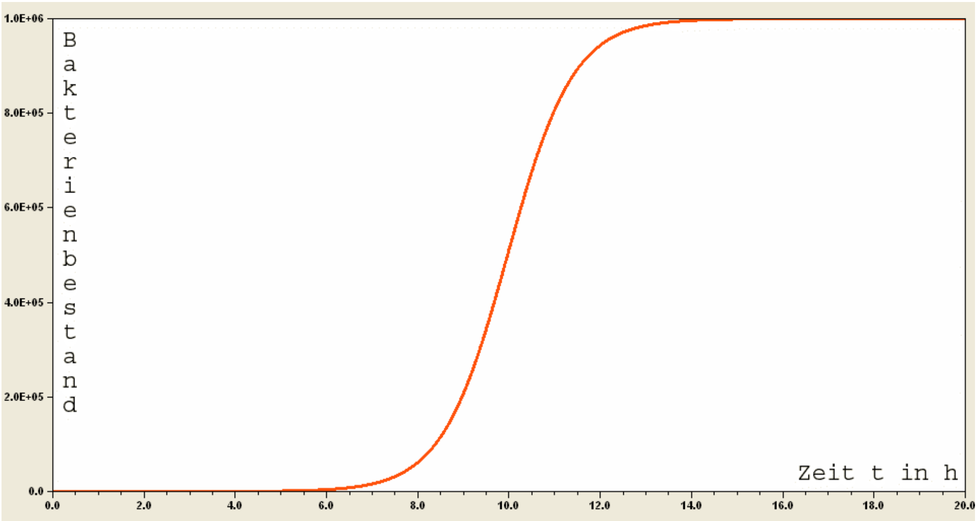
[1] vgl: [10]

6 Anhang

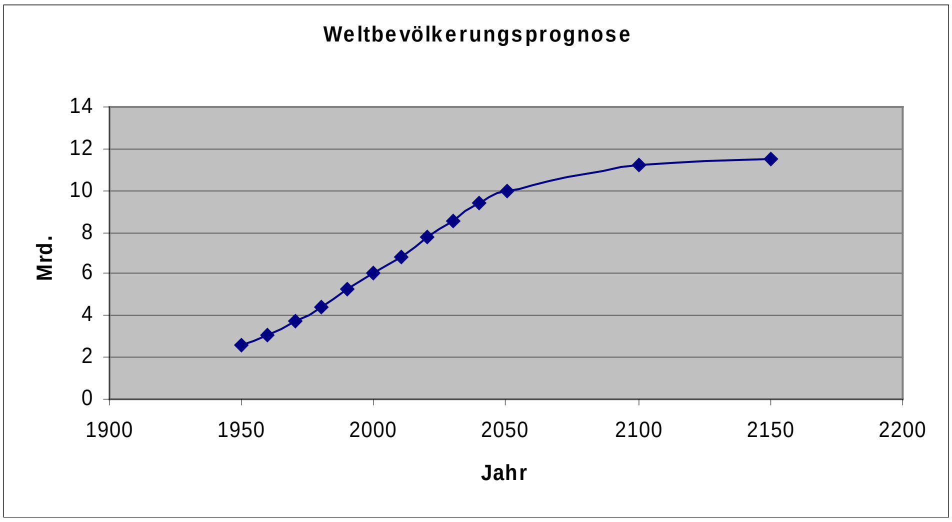
6.1 Materialien



(1)

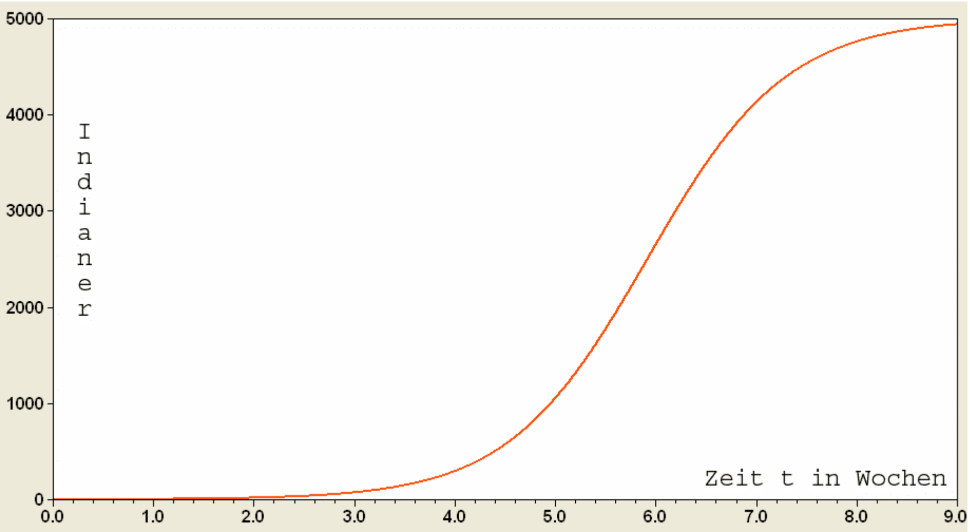


(2)

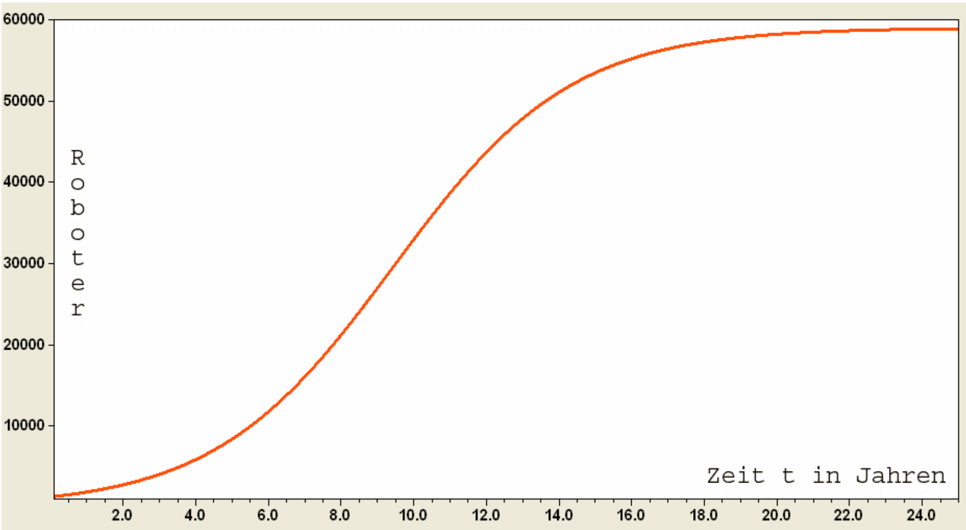


(3)

(4)

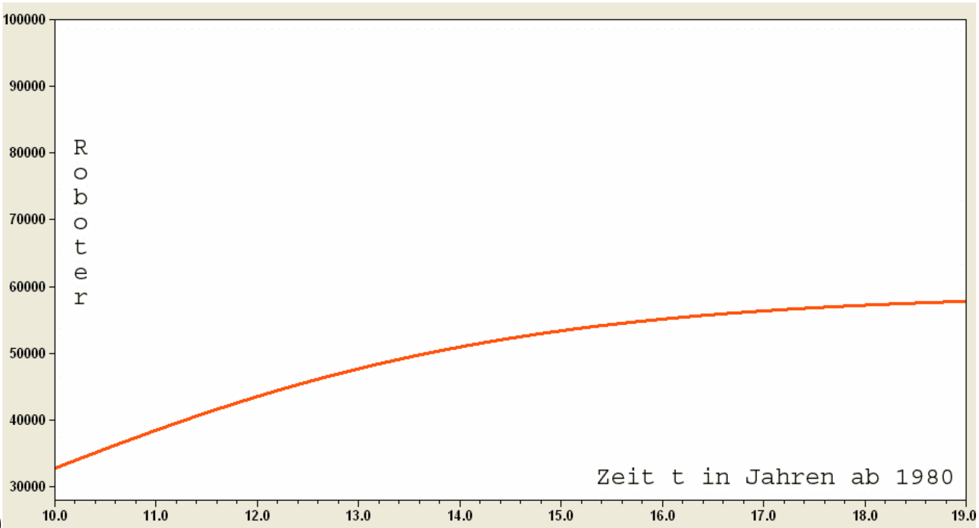


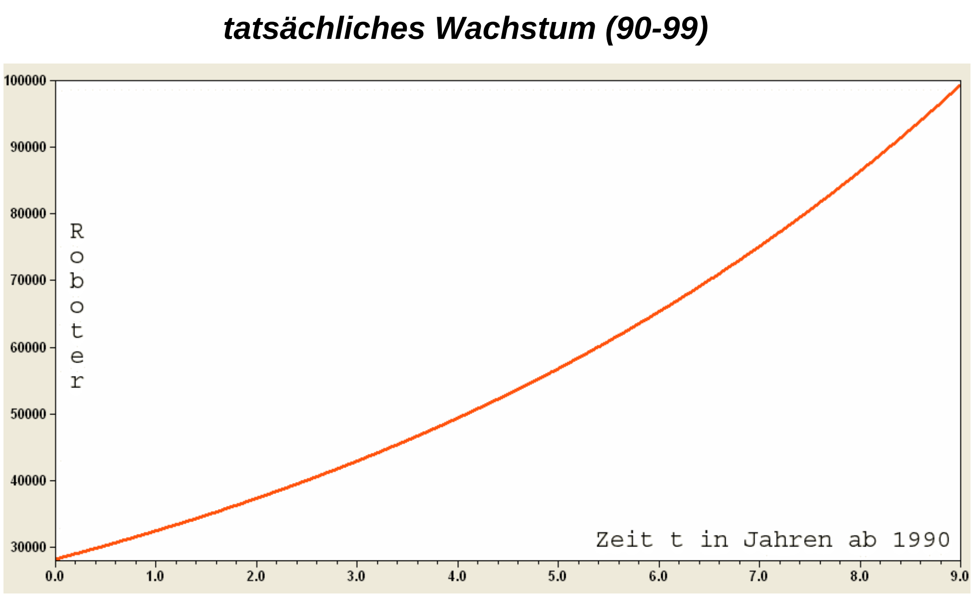
(5)

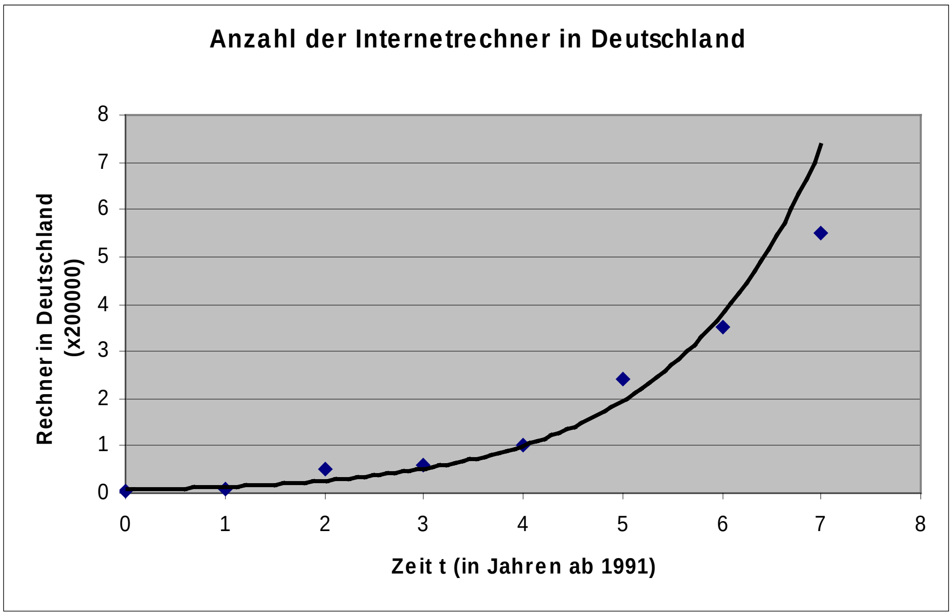


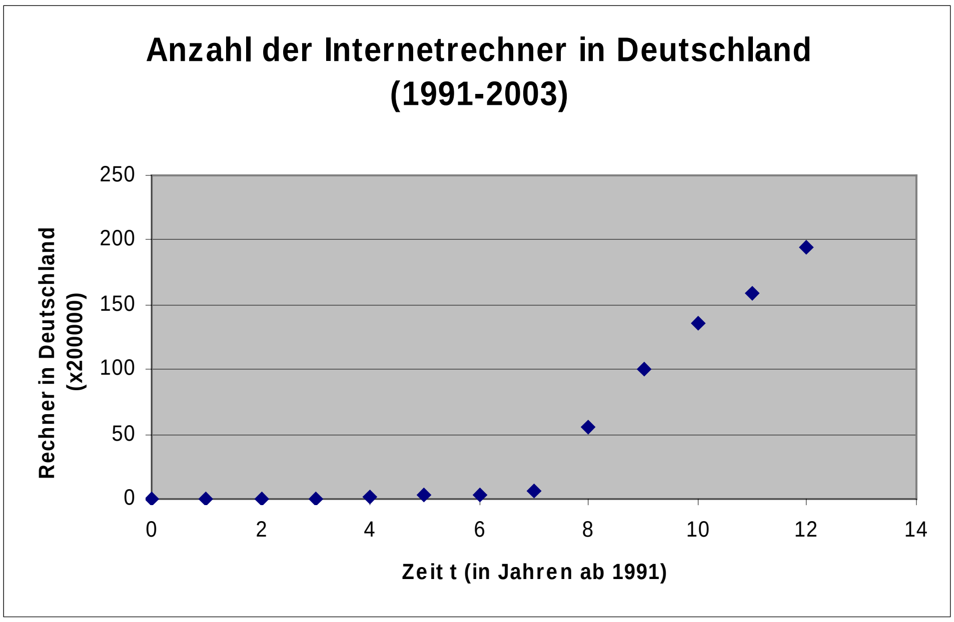
angenommenes Wachstum (90-99)

(6)




tatsächliches Wachstum (90-99)
100000
90000
80000
70000
60000
50000
40000
30000
Roboter
Zeit t in Jahren ab 1990
0.0
1.0
2.0
3.0
4.0
5.0
6.0
7.0
8.0
9.0
(7)


Anzahl der Internetrechner in Deutschland
Rechner in Deutschland (x200000)
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Zeit t (in Jahren ab 1991)
(8)


Anzahl der Internetrechner in Deutschland (1991-2003)
Rechner in Deutschland (x200000)
250
200
150
100
50
0
0
2
4
6
8
10
12
14
Zeit t (in Jahren ab 1991)
(9)

6.2 Aufgabenstellungen:

LS (2001) S. 296 Nr.7

Im tropischen Regenwald lebt isoliert ein 5000 Menschen zählender Indianerstamm. Einer seiner Bewohner wird unabsichtlich mit einer ungefährlichen, aber sehr ansteckenden Grippe infiziert. Durch gegenseitige Ansteckung in den darauf folgenden Wochen zählt man nach 4 Wochen bereits 300 Kranke.

a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von logistischem Wachstum der Anzahl K der Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?

b) Bestimmen Sie den Funktionsterm $K(t)$. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Stammesbewohner krank? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit?

c) Wie groß ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten pro Woche?

LS (2001) S. 296 Nr.10

Die nebenstehende Grafik (Fig.3) zeigt die Anzahl der in Deutschland ab 1980 installierten Industrieroboter.

a) Bestimmen Sie eine Funktion f, deren Graph den Verlauf der Grafik möglichst gut annähert.

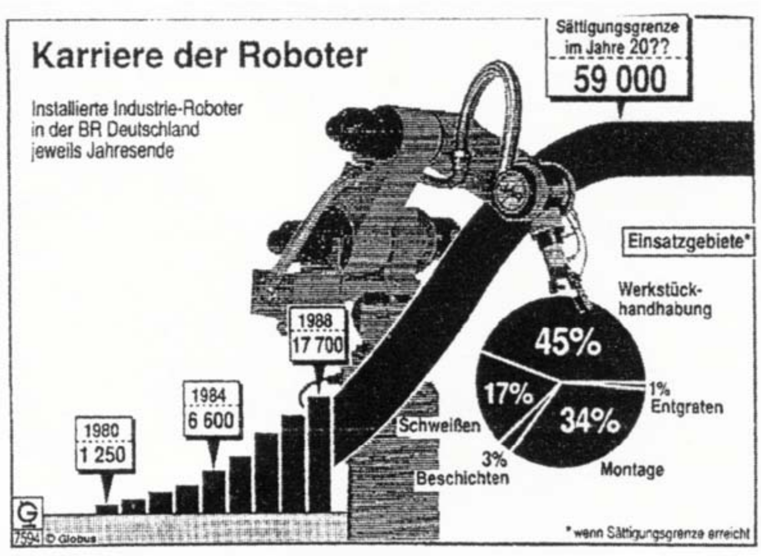
b) Wie viele Roboter sind in diesem Modell im Jahr 2005 in Betrieb? Wann werden 30000 Roboter installiert sein?

c) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit neueren Statistischen Daten (Fig.2)

Jahr	Anzahl der Industrieroboter
1990	28 240
1991	34 140
1992	39 390
1993	43 715
1994	48 840
1995	56 175
1996	66 600
1997	75 625
1998	85 565
1999	96 100

Institut der deutschen Wirtschaft (Mai 2000)

(Fig.2)



(Fig.3)

LS (2001) S. 297 Nr.14

Die Grafik (Fig.3) zeigt die Anzahl der Internetrechner in Deutschland ab 1991.

a) Führen Sie unter der Annahme von exponentiellem Wachstum eine Funktionsanpassung durch,

b) Führen Sie für verschiedene Werte für die Sättigungsgrenze S eine Funktionsanpassung unter der Annahme eines logistischen Wachstums aus.

c) Versuchen Sie zusätzliche Informationen zu finden, z.B. zur Sättigungsgrenze bzw. zur aktuellen Anzahl von Internetrechnern, und verbessern Sie damit Ihre Funktionsanpassung.

(Fig.3)

6.3 Denkanstoß: Wie viele Menschen erträgt die Natur?

„Die Umweltbelastung hängt ab von den Faktoren Bevölkerungsdichte (B), Ressourcenverbrauch pro Kopf (Konsumverhalten K) und Technologie (mehr oder weniger umweltbelastende Technik T): U = B x K x T. Je nachdem, wie viel wir konsumieren und wie umweltschonend die von uns angewendete Technologie ist, erträgt die Erde mehr oder weniger Menschen. Nach William Rees und Mathis Wackernagel ("Our Ecological Footprint", 1996) beträgt die Fläche von ökologisch produktivem Land weltweit rund 9 Mrd. ha. Bei einer Weltbevölkerung von 6 Milliarden würden demnach pro Person 1,5 ha zur Verfügung stehen. Der Verbrauch ist aber sehr ungleich verteilt. Der "ökologische Fußabdruck" eines Menschen (dabei wird der Energieverbrauch in die dafür beanspruchte Landfläche umgerechnet) beträgt bei einem durchschnittlichen Lebensstandard wie in Indien 0,4 ha, bei einem europäischen Niveau 3-4 ha, beim USA-Level 5,1 ha. Rees und Wackernagel weisen darauf hin, dass der heutige weltweite (in Nord und Süd sehr unterschiedliche) Ressourcenverbrauch die langfristige Tragfähigkeit der Erde bereits um 30% übersteigt. Wenn alle Menschen soviel verbrauchen würden wie die Amerikaner, bräuchte es drei Erdbälle wie den unsrigen, um der Nachfrage nach Ressourcen zu genügen. Wenn man davon ausgeht, dass jeder Mensch bei einem angemessenen, bescheidenen Lebensstil etwa 2 - 3 ha benötigt, dann hätten auf der Erde 3 bis maximal 4,5 Mrd. Menschen Platz. Prof. Arthur A. Westing, Oslo, kam in einer 1990 erschienenen Studie zum Schluss, die Tragfähigkeit der Erde liege bei 2 Mrd. Menschen. 1994 kam die amerikanische Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaft zum gleichen Ergebnis. Auf ähnliche Resultate kamen die amerikanischen Professoren Paul Ehrlich und David Pimentel. Wie man auch rechnet, die heutige Zahl von 6 Mrd. Erdbewohnern ist in jedem Fall zu hoch.“[1] Am 12.03.04 um 10:14:07 Uhr betrug die Weltbevölkerungszahl 6,353708337 Milliarden Menschen.[2]

[1] vgl.: [12]

7 Literaturverzeichnis

Bücher:

[1]: Eggs Herbert, Neugart Günter, Raith Fritz (Hrsg.): *Mathematische Formelsammlung, Begriffe und Sätze* -2. Auflage- Frankfurt am Main: Verlag Moritz Diesterweg 1993 (S.12,33)

[2]: Buck Heidi, Dürr Rolf, Freudigmann Hans, Reinelt Günter, Zinser Manfred (Hrsg.): *LS Analysis Leistungskurs Gesamtband, mathematisches Unterrichtswerk für das Gymnasium Ausgabe A* -1. Auflage- Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH 2001 (S.280-297)

[3]: Schmid August, Tübingen Wilhelm Schweizer, Tübingen (Hrsg.): *LS Mathematik, Analysis Zwei, Leistungskurs, Lambacher Schweizer* -1. Auflage- Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag 1990 (S.350-357)

[4]: Demmig, Richard: *Differentialgleichungen, Repetitorium höhere Mathematik dritter Teil* -14. Auflage- Darmstadt: Demmig Verlag KG 1969 (S. 5ff)

[5]: Prof. Dr. Braun, Martin: *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen*. Übers. aus dem Engl. von T. Tremmel -3. Auflage- Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer, 1994 (S.1ff; 33ff)

[6]: Dr. Kamke, Erich: Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen -Band II- New York: Chelsea Publishing Company Bronx 1974 (S.1ff)

---

[2] vgl.: [16]

[7]: Dr. Dr. Collatz, Lothar: *Differentialgleichungen, Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen* - 3.Auflage- Stuttgart: B.G. Teubner Verlag 1967 (S.11f)

Internetquellen:

[8]: http://www.net-lexikon.de/Differentialgleichung.html

[9]: http://www.glossar.de/glossar/1frame.htm?http%3A//www.glossar.de/glossar/z_intrzahl98.htm

[10]: http://www.diw.de/deutsch/produkte/publikationen/gutachten/docs/diw_rahmen_Breitbandoff200401.pdf

[11]: www.ii.uib.no/~tors/IM200/ov1/node1.html

[12]: http://www.ecopop.ch/A5BEVOELKWELT/weltbev.html

[13]: http://www.census.gov/ipc/www/worldpop.html

[14]: http://www.census.gov/ipc/www/worldhis.html

[15]: http://www.hmg-koeln.de/aktiv/mathe/weltbevo.htm

[16]: http://www.census.gov/cgi-bin/ipc/popclockw

[17]: http://www.educat.hu-berlin.de/schulen/fsag/Lehrprogamm/astro/erde.htm

Zur Erstellung der Facharbeit wurden folgende Programme verwendet:

MatheAss 8.05	©1986-2001
Microsoft® Excel 2002	©Microsoft Corporation 1985-2001

Microsoft® Word 2002	©Microsoft Corporation 1983-2001
Adobe® ImageReady 7.0	©1998-2002 Adobe Systems
MathType 5.2	©1990-2003 Design Science, Inc.

Diese Facharbeit wurde von Christoph Bruns erstellt und ist urheberrechtlich geschützt!