



Funktionen der Abiturjahrgänge

Leistungskurs 1990 und 1991

aus Baden-Württemberg

mit Ableitungen und Stammfunktionen :

(Ableitungen und Stammfunktionen, wie in den Aufgaben verlangt)

Abi 1990 Analysis 1

$$\begin{aligned}
 f_t(x) &= \frac{t^3 x^3 - 8}{4tx^2} \\
 &= \frac{t^3 x^3}{4tx^2} - \frac{8}{4tx^2} \\
 &= \frac{t^2}{4} \cdot x - \frac{2}{tx^2} = \frac{t^2}{4} \cdot x - \frac{2}{t} \cdot x^{-2} \quad ; \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad ; \quad t > 0
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Hat eine gebrochenrationale Funktion einen Nenner der Form $c \cdot x^n$, wie hier (mit $c = 4t$ und $n = 2$), dann werden die Summanden im Zähler am besten einzeln durch den Nenner geteilt und gekürzt (das entspricht der Polynomdivision). Damit kann (und sollte) man die Quotientenregel umgehen:

$$\begin{aligned}
 \text{Ableitungen: } f'_t(x) &= \frac{t^2}{4} - \frac{2}{t} \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{t^2}{4} + \frac{4}{t} \cdot x^{-3} = \frac{t^2}{4} + \frac{4}{tx^3} \\
 f''_t(x) &= \frac{4}{t} \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -\frac{12}{t} \cdot x^{-4} = -\frac{12}{tx^4} \quad (< 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Stammfunktion: } F_t(x) &= \frac{t^2}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{2}{t} \cdot \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} \\
 &= \frac{t^2}{8} \cdot x^2 + \frac{2}{t} \cdot x^{-1} = \frac{t^2}{8} \cdot x^2 + \frac{2}{tx}
 \end{aligned}$$

Abi 1990 Analysis 2

$$f(x) = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{9-x} \quad ; \quad x \in D_f =]-\infty; 9]$$

Bemerkung: Hier liegt ein Produkt vor. Es gilt $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Mit $u(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ und $v(x) = \sqrt{9-x} = (9-x)^{\frac{1}{2}}$ erhält man $u'(x) = \frac{1}{3}$ und

$$v'(x) = \frac{1}{2} \cdot (9-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{9-x}} \quad (\text{Kettenregel}).$$

Mit der Produktregel folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Ableitung: } f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{9-x} + \frac{2 \cdot \sqrt{9-x}}{2 \cdot \sqrt{9-x}} + \frac{1}{3} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{9-x}}\right) \\
 &= \frac{2 \cdot (9-x) - x}{6 \cdot \sqrt{9-x}} = \frac{18-2x-x}{6 \cdot \sqrt{9-x}} \\
 &= \frac{6-x}{2 \cdot \sqrt{9-x}} \quad ; \quad x \in D_{f'} =]-\infty; 9[
 \end{aligned}$$

Stammfunktion: nicht gefragt

Abi 1990 Analysis 3

$$f_t(x) = x \cdot \ln(x) - tx \quad ; \quad x > 0 \quad ; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Ableitungen : } f_t'(x) &= 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - t \\ &= \ln(x) + 1 - t \end{aligned}$$

$$f_t''(x) = \frac{1}{x} \quad (> 0)$$

Stammfunktion: Mit $f(x) = x \cdot (\ln(x) - t)$ und $u'(x) = x$; $u(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$
sowie $v(x) = \ln(x) - t$; $v'(x) = \frac{1}{x}$ gilt mit der Produktintegration

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)] - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t) \right] - \int \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t) \right] - \int \left(\frac{1}{2} \cdot x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t) \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot x^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\ln(x) - t) - \frac{1}{4} \cdot x^2 \right] \\ &= \left[\frac{1}{4} \cdot x^2 \cdot (2 \ln(x) - 2t - 1) \right] \end{aligned}$$

Abi 1991 Analysis 1

$$f_t(x) = \frac{1}{t} \cdot x + \frac{t}{x-t} = \frac{1}{t} \cdot x + t \cdot (x-t)^{-1} \quad ; \quad x \neq t \quad ; \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ableitungen : } f_t'(x) &= \frac{1}{t} + t \cdot (-1) \cdot (x-t)^{-2} \quad (\text{Kettenregel}) \\ &= \frac{1}{t} - t \cdot (x-t)^{-2} = \frac{1}{t} - \frac{t}{(x-t)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t''(x) &= -t \cdot (-2) \cdot (x-t)^{-3} \\ &= \frac{2t}{(x-t)^3} \quad (\neq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Stammfunktion: } F_t(x) = \frac{1}{2t} \cdot x^2 + t \cdot \ln(x-t)$$

Abi 1991 Analysis 2

$$f_t(x) = \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Hier muss man die Quotientenregel $\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ mit $u(x) = 4x$ und $v(x) = \sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ anwenden. Dabei ist zu beachten, dass bei der Ableitung $v'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$ die Kettenregel nicht vergessen wird.

$$\begin{aligned}
\text{Ableitungen : } f'_t(x) &= \frac{4 \cdot \sqrt{1+x^2} - 4x \cdot \frac{1}{2} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{1+x^2} \\
&= \frac{4 \cdot \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{4x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} \\
&= \frac{\frac{4 \cdot (1+x^2) - 4x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{4}{\sqrt{1+x^2} \cdot (1+x^2)} \\
\Rightarrow f'_t(x) &= \frac{4}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = 4 \cdot (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \\
f''_t(x) &= 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = -12x \cdot (1+x^2)^{-\frac{5}{2}} \\
\Rightarrow f''_t(x) &= \frac{-12x}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die dritte Ableitung ist unnötig, da $f''_t(x)$ bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel hat; damit existiert immer ein Wendepunkt bei $x = 0$.

$$\text{Stammfunktion: } F_t(x) = \int \frac{4x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Die Substitution $u(x) = 1 + x^2$ liefert $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \implies dx = \frac{1}{2x} \cdot du$:

$$\begin{aligned}
F_t(x) &= \int \frac{4x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x} du = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du = \int 2 \cdot u^{-\frac{1}{2}} du \\
&= \left[2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} \right] = [4 \cdot \sqrt{u}] \quad (\text{mit } u = 1 + x^2) \\
\Rightarrow F_t(x) &= 4 \cdot \sqrt{1+x^2} + c
\end{aligned}$$

Abi 1991 Analysis 3

$$f_t(x) = \ln(2 - t \cdot e^{-x}) ; x \in D_t = \{x \in \mathbb{R} | x > \ln \frac{t}{2}\} ; t \neq 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Ableitungen : } f'_t(x) &= \frac{1}{2 - t \cdot e^{-x}} \cdot (-t \cdot (-1) \cdot e^{-x}) \\
&= \frac{t \cdot e^{-x}}{2 - t \cdot e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{t}{2 \cdot e^x - t} \\
f''_t(x) &= \frac{0 - t \cdot 2 \cdot e^x}{(2 \cdot e^x - t)^2} = -\frac{2te^x}{(2 \cdot e^x - t)^2}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Die dritte Ableitung ist unnötig, da $f''_t(x) < 0$ für alle $x \in D_t$.

$$t = 2 : f_2(x) = \ln(2 - 2e^{-x}) ; f'_2(x) = \frac{1}{e^x - 1} ; f''_2(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Stammfunktion: nicht gefragt

Abi 1992 Analysis 1

$$f(x) = \frac{x^3}{3(x-1)^2} \quad ; \quad x \neq 1$$

Bemerkung: Hier liegt ein Quotient vor. Es gilt $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Mit $u(x) = x^3$ und $v(x) = 3(x-1)^2$ erhält man $u'(x) = 3x^2$ und $v'(x) = 3 \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1$ sowie $[v(x)]^2 = 9(x-1)^4$ und somit:

$$\begin{aligned} \text{Ableitungen: } f'(x) &= \frac{3 \cdot x^2 \cdot 3(x-1)^2 - x^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{9(x-1)^4} \\ &= \frac{3 \cdot (x-1) \cdot [3 \cdot x^2 \cdot (x-1) - 2x^3]}{9(x-1)^4} \\ &= \frac{3 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 2x^3}{3(x-1)^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{3(x-1)^3}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2 - 6x) \cdot 3(x-1)^3 - (x^3 - 3x^2) \cdot 3 \cdot 3 \cdot (x-1)^2 \cdot 1}{9(x-1)^6} \\ &= \frac{3(x-1)^2 \cdot [(3x^2 - 6x) \cdot (x-1) - 3(x^3 - 3x^2)]}{9(x-1)^6} \\ &= \frac{3x^3 - 3x^2 - 6x^2 + 6x - 3x^3 + 9x^2}{3(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{6x}{3(x-1)^4} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{2x}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2 \cdot (x-1)^4 - 2x \cdot 4 \cdot (x-1)^3 \cdot 1}{(x-1)^8} \\ &= \frac{(x-1)^3 \cdot [2 \cdot (x-1) - 8x]}{(x-1)^8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2x - 2 - 8x}{(x-1)^5} \\ \Rightarrow f'''(x) &= \frac{-6x - 2}{(x-1)^5} \end{aligned}$$

$$\text{Stammfunktion: } F(x) = \int \frac{x^3}{3(x-1)^2} dx$$

Mit der gebrochenrationalen Funktion f muss erst eine Polynomdivision durchgeführt werden, um eine Stammfunktion ermitteln zu können. Mit dem Nenner $3(x-1)^2 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 6x + 3$ erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3x-2}{3(x-1)^2} \\ &\quad - \frac{(x^3 - 2x^2 + x)}{3x^2 - 6x + 3} \\ &\quad \quad \quad \frac{2x^2 - x}{-(2x^2 - 4x + 2)} \\ &\quad \quad \quad \frac{3x - 2}{3x - 2} \end{aligned}$$

Damit muss nur noch die Stammfunktion von $\frac{3x-2}{3(x-1)^2}$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x-2}{3(x-1)^2} dx &= \int \frac{3x-3+1}{3(x-1)^2} dx \\
&= \int \frac{3(x-1)+1}{3(x-1)^2} dx \\
&= \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3(x-1)^2} dx \\
&= [\ln|x-1|] + \int \frac{1}{3} \cdot (x-1)^{-2} dx \\
&= [\ln|x-1| + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{-1} \cdot (x-1)^{-1}] \\
\Rightarrow \int \frac{3x-2}{3(x-1)^2} dx &= \left[\ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} \right] \text{ bzw.} \\
\Rightarrow F(x) = \int f(x) dx &= \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{3x-2}{3(x-1)^2} \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x + \ln|x-1| - \frac{1}{3(x-1)} \right]
\end{aligned}$$

Baustelle: letzte Änderung: 23.11.2002.

Diese Seiten werden fortgesetzt, falls Interesse besteht.

Wünsche und Fehler bitte an

rainer.mueller@emath.de



“Why is it important for today’s kids to learn algebra? Because I had to learn this junk in school and now it’s your turn, that’s why!”



[Abituraufgaben & Lösungen](#)

[Abi Know-How Mathematik](#)

[Mathematik - Tools](#)

[Mathe - Board](#)