

**Abiturprüfung Baden-Württemberg 1986****Leistungskurs Mathematik - Analysis 2**

Zu jedem  $t > 0$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch

$$f_t(x) = \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx}; \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihr Schaubild sei  $K_t$ .

- a) Untersuche  $K_t$  auf Asymptoten, Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse sowie auf Hoch- und Tiefpunkte.

Zeichne  $K_1$  für  $-4 \leq x \leq 2,2$  (Längeneinheit 2cm).

Die Parallele zur  $x$ -Achse durch den Hochpunkt und die Parallele zur  $y$ -Achse durch den Tiefpunkt von  $K_t$  schneiden sich im Punkt  $Q_t$ .

Welche Kurve bilden diese Punkte  $Q_t$ , wenn  $t$  alle zugelassenen Werte annimmt? (9 VP)

- b) Die Normale zu  $K_1$  im Ursprung schneidet  $K_1$  in einem weiteren Punkt  $S$ .

Berechne die Abszisse von  $S$  mit dem Newtonschen Näherungsverfahren (das Verfahren ist abzubrechen, wenn sich die 4. Dezimale nicht mehr ändert); gib dann das Ergebnis auf 3 Dezimalen gerundet an. (8 VP)

- c) Die Kurve  $K_t$ , die  $x$ -Achse und die Gerade  $x = u$  mit  $u < 0$  begrenzen im 2. Feld eine Fläche mit dem Inhalt  $A_t(u)$ .

Berechne  $A_t(u)$  und  $\lim_{u \rightarrow -\infty} A_t(u)$ . (7 VP)

- d) Für jedes  $t > 0$  ist außer  $K_t$  noch die Parabel  $P_t$  gegeben durch

$$y = t \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right)$$

Bestimme diejenigen Werte von  $t$ , für die sich  $P_t$  und  $K_t$  in genau zwei Punkten schneiden. (6 VP)

# Lösung



## Abiturprüfung Baden-Württemberg 1986

### Leistungskurs Mathematik - Analysis 2

Zu jedem  $t > 0$  ist eine Funktion  $f_t$  gegeben durch

$$f_t(x) = \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx}; \quad x \in \mathbb{R}$$

#### a) Asymptoten

##### Senkrechte Asymptoten

Es gibt keine senkrechten Asymptoten, da  $D = \mathbb{R}$ .

##### Waagrechte Asymptoten

Hier ist das Verhalten von  $f_t(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  zu untersuchen:

$$x \rightarrow +\infty : \left\{ \begin{array}{l} x^2 - \frac{2x}{t} = x \cdot \left(x - \frac{2}{t}\right) \rightarrow \infty \\ e^{tx} \rightarrow \infty \quad (\text{wegen } t > 0) \end{array} \right. \implies f_t(x) \rightarrow \infty$$

Für  $x \rightarrow +\infty$  erhält man also keine Asymptote.

$$x \rightarrow -\infty : \left\{ \begin{array}{l} x^2 - \frac{2x}{t} = \underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{\left(x - \frac{2}{t}\right)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow \infty \\ e^{tx} \rightarrow 0 \quad (\text{wegen } t > 0) \end{array} \right\} \implies f_t(x) \rightarrow 0$$

Erklärung: Es gilt zwar  $x^2 - \frac{2x}{t} \rightarrow \infty$ , aber auch  $e^{tx} \rightarrow 0$ .

Da die  $e$ -Funktion "stärker" gegen null geht, als jede Potenzfunktion, folgt  $f_t(x) \rightarrow 0$ .

Die  $x$ -Achse  $y = 0$  ist daher waagrechte Asymptote.

Das wird z.B. mit der Regel von de l'Hopital nachgewiesen:

Umformen liefert  $f_t(x) = \frac{x^2 - \frac{2x}{t}}{e^{-tx}}$ , wobei  $\left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \rightarrow \infty$  und  $e^{-tx} \rightarrow \infty$  (für  $x \rightarrow -\infty$ ).

Daher darf man Zähler und Nenner getrennt ableiten und danach den Limes bilden

(beachte: beim Ableiten von  $a \cdot e^{kx}$  erhält man  $ak \cdot e^{kx}$ ):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - \frac{2x}{t}}{e^{-tx}} \stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{2}{t}}{-te^{-tx}}$$

Jetzt geht der Zähler gegen minus unendlich, der Nenner geht (wegen  $t > 0$ ) ebenfalls gegen minus unendlich; daher darf wieder die Regel von de l'Hopital angewendet werden. Man erhält schließlich

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \frac{2}{t}}{-te^{-tx}} \stackrel{\text{de l'H.}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{t^2 e^{-tx}} = 0$$

$y = 0$  ist also waagrechte Asymptote und  $f_t(x)$  nähert sich ihr von oben an, da  $2 > 0$  und  $t^2 e^{-tx} > 0$  (bzw. da  $f_t(x) = x \cdot \left(x - \frac{2}{t}\right) \cdot e^{tx} > 0$  für  $x < 0$ ).

Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse

$$\begin{aligned}
 f_t(x) &= 0 \\
 \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx} &= 0 \\
 x \left(x - \frac{2}{t}\right) e^{tx} &= 0 \quad ; \text{wegen } e^{tx} \neq 0 \text{ folgt} \\
 x \left(x - \frac{2}{t}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

Daher erhält man  $x_1 = 0$  oder  $x - \frac{2}{t} = 0 \xrightarrow{|\ + \frac{2}{t}} x_2 = \frac{2}{t}$ :

$$N_1(0|0) \quad ; \quad N_2\left(\frac{2}{t} \mid 0\right)$$

Extrema

Dazu benötigt man die

Ableitungen mit der Produkt und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
 f_t(x) &= \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) e^{tx} \\
 f'_t(x) &= \left(2x - \frac{2}{t}\right) e^{tx} + \left(x^2 - \frac{2x}{t}\right) \cdot t \cdot e^{tx} \\
 &= e^{tx} \left(2x - \frac{2}{t} + tx^2 - 2x\right) \\
 &= e^{tx} \left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) \\
 f''_t(x) &= t \cdot e^{tx} \left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) + e^{tx} \cdot 2tx \\
 &= e^{tx} (t^2x^2 + 2tx - 2)
 \end{aligned}$$

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
 f'_t(x) &= 0 \\
 e^{tx} \left(tx^2 - \frac{2}{t}\right) &= 0 \quad ; \text{wegen } e^{tx} \neq 0 \text{ folgt} \\
 tx^2 - \frac{2}{t} &= 0 \quad | + \frac{2}{t} \\
 tx^2 &= \frac{2}{t} \quad | \cdot \frac{1}{t} \quad (t \neq 0) \\
 x^2 &= \frac{2}{t^2} \quad | \sqrt{\cdot} \quad : \text{erlaubt wegen } \frac{2}{t^2} > 0 \\
 x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t} & \quad ; \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t}
 \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung ( $f'_t(x) = 0$  und  $f''_t(x) \neq 0$ )

Da für die gefundenen Stellen schon  $f'_t(x_{1;2}) = 0$  gilt, muss nur noch  $f''_t(x_{1;2}) \neq 0$  überprüft werden:

Wegen  $e^{tx} > 0$  hat  $f''_t(x) = e^{tx} (t^2 x^2 + 2tx - 2)$  das gleiche Vorzeichen wie  $(t^2 x^2 + 2tx - 2)$ :

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t} : \quad t^2 \frac{2}{t^2} + 2t \left(-\frac{\sqrt{2}}{t}\right) - 2 = -2\sqrt{2} < 0 \quad \Rightarrow \quad f''_t(x_1) < 0$$

Bei  $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{t}$  ist also ein Hochpunkt.

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t} : \quad t^2 \frac{2}{t^2} + 2t \frac{\sqrt{2}}{t} - 2 = 2\sqrt{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad f''_t(x_2) > 0$$

Bei  $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{t}$  ist also ein Tiefpunkt.

Funktionswerte

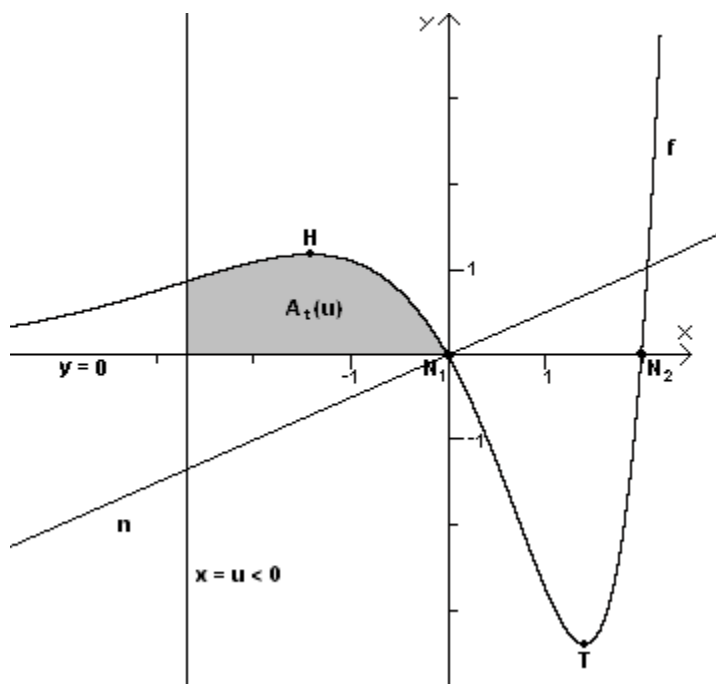
$$f_t(x_1) = f_t\left(-\frac{\sqrt{2}}{t}\right) = \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{t}\right)\right) \cdot e^{t\left(-\frac{\sqrt{2}}{t}\right)} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{t^2} \cdot e^{-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Hochpunkt } H \left( -\frac{\sqrt{2}}{t} \mid \frac{2 + 2\sqrt{2}}{t^2 e^{\sqrt{2}}} \right)$$

$$f_t(x_2) = f_t\left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right) = \left(\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t} \cdot \frac{\sqrt{2}}{t}\right) \cdot e^{t\frac{\sqrt{2}}{t}} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{t^2} \cdot e^{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Tiefpunkt } T \left( \frac{\sqrt{2}}{t} \mid \frac{2 - 2\sqrt{2}}{t^2} e^{\sqrt{2}} \right)$$

Zeichnung ( $t = 1$ )



Kurve der Punkte  $Q_t$  (Ortskurve)

Die Parallele zur  $x$ -Achse durch  $H$  hat die Gleichung  $y = \frac{2+2\sqrt{2}}{t^2 e^{\sqrt{2}}}$ .

Die Parallele zur  $y$ -Achse durch  $T$  hat die Gleichung  $x = \frac{\sqrt{2}}{t}$ .

Deswegen hat  $Q_t$  dieselben Koordinaten:  $Q_t(\frac{\sqrt{2}}{t} | \frac{2+2\sqrt{2}}{t^2 e^{\sqrt{2}}})$ .

Die Kurve, welche die Punkte  $Q_t$  bilden, nennt man auch "Ortskurve". Um sie zu erhalten, löst man  $x$  nach  $t$  auf und setzt das dann in  $y$  ein:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{t} \quad \left| \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} \right. & t &= \frac{\sqrt{2}}{x} \quad ; \text{ in } y \text{ eingesetzt ergibt das} \\ y &= \frac{2+2\sqrt{2}}{\frac{2}{x^2} \cdot e^{\sqrt{2}}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{2 \cdot (1+\sqrt{2})}{e^{\sqrt{2}}} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \cdot x^2 \end{aligned}$$

Wegen  $t > 0$  gilt auch  $x = \frac{\sqrt{2}}{t} > 0$ .

Also liegen die Punkte  $Q_t$  auf der Parabel  $y = \frac{1+\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}} \cdot x^2$  mit  $x > 0$ .

b) Normale von  $K_1$  im Ursprung

Setzt man  $t = 1$  in  $f_t$  und in  $f'_t$  aus Teilaufgabe a) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x^2 - 2x)e^x \\ f'_1(x) &= (x^2 - 2)e^x \end{aligned}$$

Für  $x = 0$  ergibt sich die Tangentensteigung  $m_t = f'_1(0) = -2$ .

Die Normale im Ursprung  $O(0|0)$  ist senkrecht zur Tangenten und hat als Steigung  $m_n$  den negativen Kehrwert von  $m_t$ :

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Da die Normale eine Ursprungsgerade ist, hat sie also die Gleichung

$$n : y = \frac{1}{2} \cdot x$$

Der Schnitt der Normalen  $n$  mit  $f_1$  liefert durch Gleichsetzen die Gleichung

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x) \cdot e^x &= \frac{1}{2} \cdot x \quad | \cdot 2 \\ (2x^2 - 4x)e^x &= x \quad | - x \\ 2(x^2 - 2x)e^x - x &= 0 \end{aligned}$$

Jetzt wird im Hinblick auf das Newton-Verfahren die Funktion

$$g(x) := 2(x^2 - 2x)e^x - x$$

definiert und abgeleitet (beachte dabei, dass gilt:  $g(x) = 2 \cdot f_1(x) - x$ ):

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cdot f'_1(x) - 1 \\ &= 2 \cdot (x^2 - 2)e^x - 1 \end{aligned}$$

Aus der Zeichnung ermittelt man eine Näherungslösung  $x_0$ , indem man die Normale im Ursprung einzeichnet und in etwa die  $x$ -Koordinate des (vom Ursprung  $O(0|0)$  verschiedenen)

Schnittpunktes abliest; ein möglicher Wert ist etwa  $x_0 = 2$ .

### Rekursive Gleichung für das Newtonverfahren

Die rekursive Gleichung für das Newtonsche Näherungsverfahren für  $g(x) = 0$  (das heißt: einer approximativen Lösung von  $g(x) = 0$ ) lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

Setzt man  $g$  und  $g'$  hier ein, dann erhält man

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot (x_n^2 - 2x_n) \cdot e^{x_n} - x_n}{2 \cdot (x_n^2 - 2) \cdot e^{x_n} - 1}$$

Diese Gleichung liefert mit dem Startwert  $x_0 = 2$  nacheinander die Werte

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \frac{2 \cdot (2^2 - 2 \cdot 2) \cdot e^2 - 2}{2 \cdot (2^2 - 2) \cdot e^2 - 1} \\ &= 2 - \frac{-2}{4 \cdot e^2 - 1} = 2 + \frac{2}{4 \cdot e^2 - 1} \\ \Rightarrow x_1 &\approx 2,07003727 \\ x_2 &\approx 2,063565521 \\ x_3 &\approx 2,063504077 \end{aligned}$$

Von  $x_2$  auf  $x_3$  hat sich die vierte Dezimale nicht mehr verändert. Das auf 3 Stellen gerundete Ergebnis lautet damit

$$z = 2,064$$

### c) Fläche $A_t(u)$ im 2. Feld (uneigentliches Integral)

Für alle  $x < 0$  gilt  $f_t(x) > 0$ :  $f_t$  liegt im 2. Feld über der  $x$ -Achse. Daher gilt für die gesuchte Fläche (mit  $u < 0$ )

$$\begin{aligned} A_t(u) &= \int_u^0 f_t(x) dx \\ &= \int_u^0 \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \cdot e^{tx} dx \end{aligned}$$

Hier ist es am besten, die Produktintegration anzuwenden, denn es liegt ja auch ein Produkt vor (beachte dabei: eine Stammfunktion von  $a \cdot e^{kx}$  ist  $\frac{a}{k} \cdot e^{kx}$ ):

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 - \frac{2x}{t} \quad \text{und} \quad v'(x) = e^{tx} \quad \text{liefert} \\ u'(x) &= 2x - \frac{2}{t} \quad \text{und} \quad v(x) = \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \end{aligned}$$

Wegen  $\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx$  folgt dann

$$A_t(u) = \left[ \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \right]_u^0 - \int_u^0 \left( 2x - \frac{2}{t} \right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx} dx$$

Jetzt wird eine weitere Produktintegration benötigt:

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - \frac{2}{t} & \text{und} & & v'(x) &= \frac{1}{t} \cdot e^{tx} & \text{liefert} \\ u'(x) &= 2 & \text{und} & & v(x) &= \frac{1}{t^2} \cdot e^{tx} \end{aligned}$$

Damit erhält man dann

$$\begin{aligned} A_t(u) &= \left[ \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \right]_u^0 - \left( \left[ \left( 2x - \frac{2}{t} \right) \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{tx} \right]_u^0 - \int_u^0 \frac{2}{t^2} \cdot e^{tx} dx \right) \\ &= \left[ \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) - \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left( \frac{2x}{t} - \frac{2}{t^2} \right) \right]_u^0 + \left[ \frac{2}{t^2} \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \right]_u^0 \\ &= \left[ \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} - \frac{2x}{t} + \frac{2}{t^2} \right) + \frac{2}{t^3} \cdot e^{tx} \right]_u^0 \\ &= \left[ \frac{1}{t} \cdot e^{tx} \cdot \left( x^2 - \frac{4x}{t} + \frac{4}{t^2} \right) \right]_u^0 \\ &= \frac{1}{t} \cdot 1 \cdot \left( 0 - 0 + \frac{4}{t^2} \right) - \left[ \frac{1}{t} \cdot e^{tu} \cdot \left( u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2} \right) \right] \\ \implies A_t(u) &= \frac{4}{t^3} - \frac{1}{t} \cdot e^{tu} \cdot \left( u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2} \right) \end{aligned}$$

Der Term  $\frac{1}{t} \cdot e^{tu} \left( u^2 - \frac{4u}{t} + \frac{4}{t^2} \right)$  konvergiert mit  $u \rightarrow -\infty$  gegen null, da die  $e$ -Funktion „stärker“ gegen null geht, als jede Potenzfunktion. Daher gilt

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} A_t(u) = \frac{4}{t^3}$$

d) Schnitt von  $K_t$  und  $P_t$  für  $t > 0$

Dazu werden  $f_t(x)$  und  $y = t \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right)$  gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \cdot e^{tx} &= t \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) & | -t \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \\ \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \cdot e^{tx} - t \cdot \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) &= 0 & [\text{jetzt } \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) \text{ ausklammern}] \\ \left( x^2 - \frac{2x}{t} \right) (e^{tx} - t) &= 0 \\ x \left( x - \frac{2}{t} \right) (e^{tx} - t) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung liefert genau die Lösungen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = \frac{2}{t}$  sowie die Lösung der Gleichung  $e^{tx} - t = 0$ .

Diese letzte Gleichung liefert  $e^{tx} = t$ ; wegen  $t > 0$  darf man logarithmieren:

$$t \cdot x = \ln(t) \quad | :t \neq 0 \implies x_3 = \frac{\ln(t)}{t}$$

Die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  sind verschieden; man muss sich also darum kümmern, dass die dritte Lösung  $x_3$  mit einem der Werte  $x_1$  oder  $x_2$  zusammenfällt, damit es genau zwei Schnittpunkte gibt:

1. Fall:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_1 \\ \frac{\ln(t)}{t} &= 0 \quad | \cdot t \neq 0 \\ \ln(t) &= 0 \quad | e^{(\cdot)} \\ t &= 1\end{aligned}$$

2. Fall:

$$\begin{aligned}x_3 &= x_2 \\ \frac{\ln(t)}{t} &= \frac{2}{t} \quad | \cdot t \neq 0 \\ \ln(t) &= 2 \quad | e^{(\cdot)} \\ t &= e^2\end{aligned}$$

D.h.  $P_t$  und  $K_t$  schneiden sich genau dann in genau zwei Punkten,  
wenn  $t = 1$  ( $x_1 = 0$  ;  $x_2 = 2$ ) oder wenn  $t = e^2$  ( $x_1 = 0$  ;  $x_2 = \frac{2}{e^2}$ ) ist.

Ergänzungen:  $x \in \mathbb{R}$  ;  $y > 0$ 

$$\begin{aligned}n \in \mathbb{Z}, t > 0: \quad x \rightarrow +\infty &\implies x^n \cdot e^{tx} \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow -\infty &\implies x^n \cdot e^{tx} \rightarrow 0 \\ e^x = y > 0 &\iff x = \ln(y) \\ e^0 = 1 ; e^1 = e &; \ln(1) = 0 ; \ln(e) = 1 \\ a, b > 0: \quad \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b) &; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \\ r \in \mathbb{R}: \quad \ln(a^r) = r \cdot \ln(a) &; \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)\end{aligned}$$