# Original Abituraufgaben - Analysis

## Aufgabe mit Lösung:

### Abiturprüfung Bayern 2007

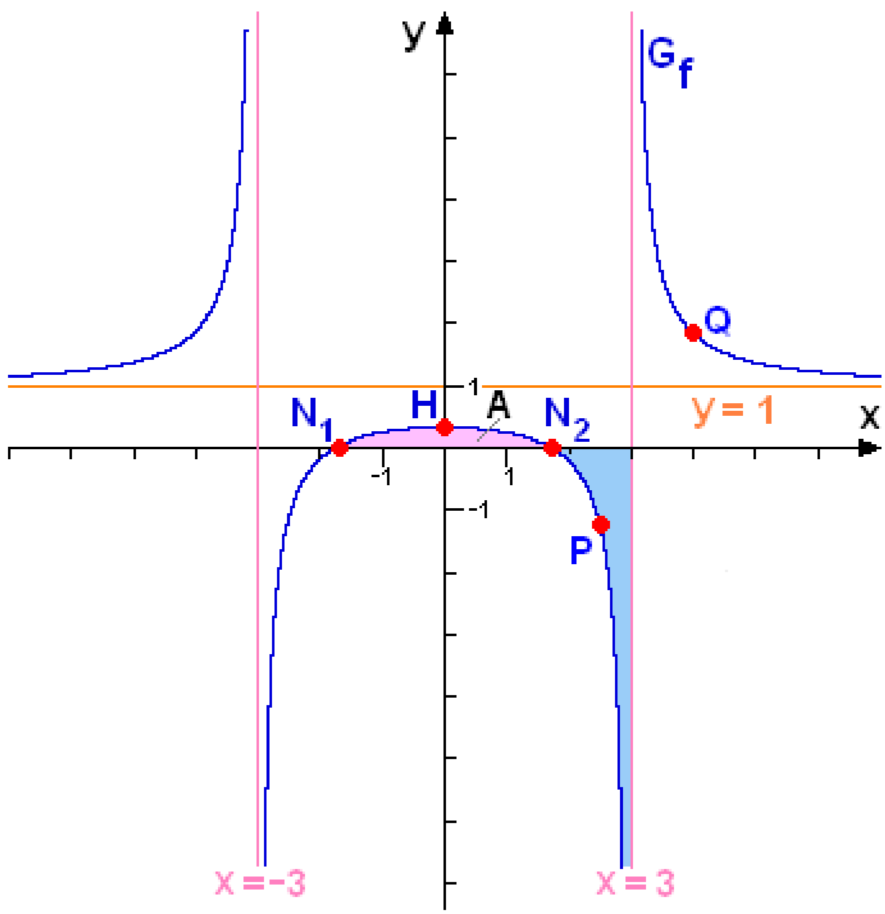
#### Grundkurs Mathematik - Infinitesimalrechnung 2

Gegeben ist die Funktion $f$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9}$$

mit maximalem Definitionsbereich $D_f$. Der Graph wird mit $G_f$ bezeichnet.

Skizze



# Original - Aufgabenstellung

**Teilaufgabe 1. a)** Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathrm{D}_f$, die Nullstellen von $f$ und das Symmetrieverhalten von $G_f$ an.

(4 BE)

**Teilaufgabe b)** Untersuchen Sie das Verhalten von $f$ an den Rändern des Definitionsbereichs und geben Sie die Asymptoten von $G_f$ an.

(6 BE)

**Teilaufgabe c)** Bestimmen Sie Art und Lage des relativen Extrempunkts $E$ von $G_f$.

[ Zur Kontrolle: $E(0|\frac{1}{3})$ ]

(6 BE)

# Lösung

1. a) Maximaler Definitionsbereich $\mathrm{D}_f$ von $f$

Bei einer gebrochenrationalen Funktion wie im vorliegenden Fall darf der Nenner nicht 0 werden:

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= 0 \\ (x+3)\cdot(x-3) &= 0 \\ x_1 = -3 \quad ; &\quad x_1 = 3 \\ \Longrightarrow \mathrm{D}_f &= \mathbb{R}\setminus\{-3;3\} \end{aligned}$$

Nullstelle von $f$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \frac{x^2-3}{x^2-9} &= 0 \qquad |\cdot(x^2-9) \\ x^2-3 &= 0 \qquad |+3 \\ x^2 &= 3 \qquad |\sqrt{(...)} \\ x_1 = -\sqrt{3} \quad ; &\quad x_2 = \sqrt{3} \approx 1,73 \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte von $G_f$ mit der $x$-Achse sind also die Punkte

$$N_1\left(-\sqrt{3}|0\right) \quad ; \quad N_2\left(\sqrt{3}|0\right)$$

## Symmetrieverhalten von $G_f$

Dazu berechnet man $f(-x)$ und vergleicht mit dem Funktionsterm $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 - 3}{(-x)^2 - 9} \\ &= \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} \\ \Longrightarrow f(-x) &= f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ aus } \mathrm{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\} \end{aligned}$$

Daher ist das Schaubild $G_f$ von $f$ achsensymmetrisch zur $y$-Achse.

## b) Verhalten von $f$ an den Rändern von $\mathrm{D}_f$ und Asymptoten

Der Definitionsbereich $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\} = ]-\infty; -3[\ \cup\ ]-3; 3[\ \cup\ ]3; +\infty[$ hat die Ränder $\pm\infty$ und $\pm 3$:

$$x \longrightarrow \pm\infty: \ f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} \longrightarrow \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1$$

Daher ist die Gerade $y = 1$ die waagrechte Asymptote von $G_f$.

$$x \longrightarrow 3^- \ (x < 3): \ f(x) = \frac{\overbrace{x^2 - 3}^{\to 6}}{\underbrace{(x - 3)}_{\to 0^-} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{\to 6}} \longrightarrow -\infty$$

$$x \longrightarrow 3^+ \ (x > 3): \ f(x) = \frac{\overbrace{x^2 - 3}^{\to 6}}{\underbrace{(x - 3)}_{\to 0^+} \cdot \underbrace{(x + 3)}_{\to 6}} \longrightarrow +\infty$$

Aus Symmetriegründen folgt

$$\begin{aligned} x &\longrightarrow -3^- \ (x < -3): \ f(x) \longrightarrow +\infty \\ x &\longrightarrow -3^+ \ (x > -3): \ f(x) \longrightarrow -\infty \end{aligned}$$

Daher sind die Geraden $x = -3$ und $x = 3$ die senkrechten Asymptoten von $G_f$.

## c) Art und Lage des relativen Extrempunkts $E$ von $G_f$

Dazu benötigt man die erste

### Ableitung von $f$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 9} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ wird mit der Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

abgeleitet. Hier erhält man

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - (x^2 - 3) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} \\
&= \frac{2x^3 - 18x - (2x^3 - 6x)}{(x^2 - 9)^2} \\
&= \frac{-12x}{(x^2 - 9)^2}
\end{aligned}
$$

## Notwendige Bedingung

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
-12x &= 0 \qquad | : (-12) \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

## Hinreichende Bedingung über einen Vorzeichenwechsel von $f'$

Es genügt, bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $f'$ nachzuweisen:

Für $x < 0$ gilt $-12x > 0$ und damit $f'(x) > 0$ (denn der Nenner ist positiv).
Für $x > 0$ gilt $-12x < 0$ und damit $f'(x) < 0$.

Die Ableitung $f'$ hat also bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von plus nach minus.
Damit liegt bei $x = 0$ ein relatives Maximum vor. Mit dem Funktionswert $f(0) = \frac{0-3}{0-9} = \frac{1}{3}$ erhält man den

$$\text{Hochpunkt } E = H\left(0 \middle| \frac{1}{3}\right)$$

## Zusatz: zweite Ableitung

Der übliche Weg wäre der Nachweis von $f''(0) \neq 0$ gewesen. Zur Ergänzung hier noch die zweite Ableitung:

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-12 \cdot (x^2 - 9)^2 - (-12x) \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} \qquad ;\text{ Kürzen von } (x^2 - 9): \\
&= \frac{-12 \cdot (x^2 - 9) + 12x \cdot 2 \cdot 2x}{(x^2 - 9)^3} \\
&= \frac{-12x^2 + 108 + 48x^2}{(x^2 - 9)^3} \\
&= \frac{36x^2 + 108}{(x^2 - 9)^3}
\end{aligned}
$$

Es gilt $f''(0) = \frac{108}{(-9)^3} < 0$; dies weist ebenfalls nach, dass bei $x = 0$ ein relatives Maximum vorliegt.