Musteraufgaben 2007 - 2008

Stochastik - Aufgabe mit Lösung

Aufgabe: Eine Firma stellt „Billig-Glühlämpchen" her. Dabei entstehen erfahrungsgemäß 10 % Ausschuss. Die nicht kontrollierten Lämpchen werden in Kartons zu 50 Packungen mit je 20 Stück abgepackt.

1. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer 20er Packung mehr als drei Lämpchen defekt sind?
   [Ergebnis: 13,3 %] (4 VP)

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in einem 50er Karton höchstens eine 20er Packung mit mehr als drei defekten Lämpchen? (5 VP)

2. Dem Elektrogeschäft Krötl wurde eine Serie von 20er Packungen mit jeweils genau 5 defekten Lämpchen geliefert.

   a) Ein Kunde kauft 10 Lämpchen, die gleichzeitig einer vollen 20er Packung entnommen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter diesen zehn Lämpchen genau 2 defekt?

   (4 VP)

   b) Auf wie viele Arten kann man 2 defekte und 8 intakte, sonst nicht unterscheidbare Lämpchen als Lichterkette in einer Reihe anordnen, wenn

   (1) keine weiteren Bedingungen vorliegen,

   (2) die defekten Lämpchen nicht nebeneinander liegen sollen?

   (5 VP)

   c) Ein weiterer Kunde möchte drei Lämpchen kaufen. Der Verkäufer entnimmt ein Lämpchen aus einer vollen 20er Packung mit 5 defekten Lämpchen und prüft es. Ist es defekt, wirft er es weg, sonst gibt er es dem Kunden und entnimmt der Packung das nächste zu prüfende Lämpchen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das vierte vom Verkäufer geprüfte Lämpchen das dritte intakte?

   (7 VP)

Lösung: 1. a) Die Zufallsvariable X für die Anzahl der defekten Lämpchen in einer 20er Packung ist $B_{20;0,1}-$verteilt. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit folgt mithilfe der Tabelle für die summierte Binomialverteilung:

$$\begin{aligned} P(X>3) &= 1-P(X\leq 3) \\ \Longrightarrow \quad P(X>3) &\approx 0,1330 = 13,30\% \end{aligned}$$

b) Z sei die Zufallsvariable für die Anzahl der 20er Packungen in einem 50er Karton, die mehr als 3 defekte Lämpchen enthalten. Mit dem Ergebnis aus Teil a) ist Z $B_{50;0,133}-$verteilt und es folgt wieder mit der Tabelle:

$$P(Z\leq 1)\approx 0,0069 = 0,69\%$$

2. a) Der Kunde hat $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, 2 defekte Lämpchen auszuwählen und $\binom{15}{8}$ Möglichkeiten, 8 intakte auszuwählen.
Damit gibt es $\binom{5}{2}\cdot\binom{15}{8}$ verschiedene Möglichkeiten, 2 defekte (und 8 intakte) Lämpchen zu erhalten bei insgesamt $\binom{20}{10}$ möglichen Kombinationen, 10 Lämpchen aus 20 Lämpchen auszuwählen. Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt somit

$$\begin{aligned} p &= \frac{\binom{5}{2}\cdot\binom{15}{8}}{\binom{20}{10}} \\ \Longrightarrow \quad p &\approx 0,3483 = 34,83\% \end{aligned}$$

b) zu (1): Es gibt so viele Möglichkeiten, die Lämpchen anzuordnen, wie es Arten gibt, 2 defekte (b.z.w. 8 intakte) Lämpchen auf 10 Plätze zu verteilen.
Das sind $\binom{10}{2}=\binom{10}{8}=45$ Möglichkeiten.

zu (2): von den 45 Fällen aus (1) gibt es 9 Fälle, in denen die 2 defekten Lämpchen nebeneinander liegen (defekte Lämpchen an Position 1-2, 2-3,..., 8-9, 9-10).
Damit gibt es $45-9=36$ Möglichkeiten der Anordnung, ohne dass sich die 2 defekten Lämpchen nebeneinander befinden.

c) Es gibt 3 mögliche Anordnungen, so dass das vierte geprüfte Lämpchen das dritte intakte ist. Für die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt (mit i:intakt und d:defekt):

$$\begin{aligned} p(d,i,i,i) &= \frac{5}{20}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\approx 0,1174 \\ p(i,d,i,i) &= \frac{15}{20}\cdot\frac{5}{19}\cdot\frac{14}{18}\cdot\frac{13}{17}\approx 0,1174 \\ p(i,i,d,i) &= \frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{5}{18}\cdot\frac{13}{17}\approx 0,1174 \end{aligned}$$

Für die gesuchte Gesamtwahrscheinlichkeit p gilt somit

$$\begin{aligned} p &= p(d,i,i,i)+p(i,d,i,i)+p(i,i,d,i) \\ &\approx 3\cdot 0,1174 \\ \Longrightarrow \quad p &\approx 0,3522 = 35,22\% \end{aligned}$$