Musteraufgaben 2007 - 2008

Geometrie - Aufgabe mit Lösung

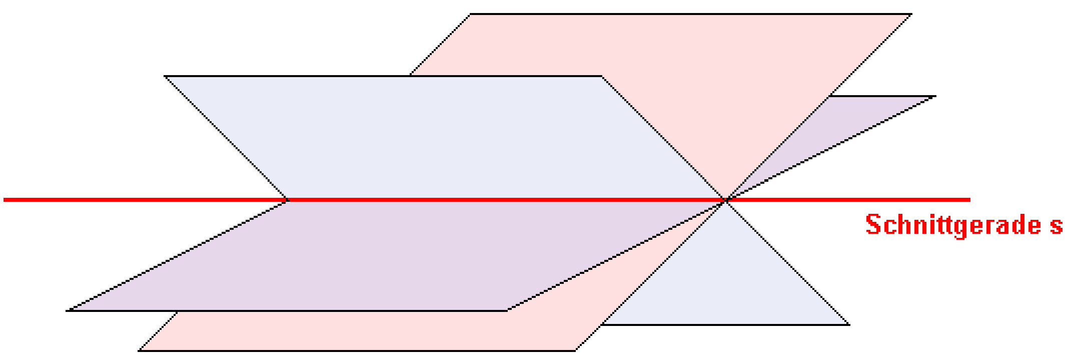
Aufgabe: a) Untersuchen Sie das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) auf Lösbarkeit:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch. (5 VP)

Lösung: Jede der Ebenen enthält eine Gerade, die allen drei Ebenen gemeinsam ist.
Dies veranschaulicht die folgende

Skizze



Darauf kommt man folgendermaßen:

zu a) Aus dem gegebenen Gleichungssystem erhält man die Matrix

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array}$$

Mit $(\text{II}') = 2\cdot(\text{I}) + (-1)\cdot(\text{II})$ und $(\text{III}') = (\text{I}) + (-1)\cdot(\text{III})$ folgt

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II}') \\ \text{(III}') \end{array}$$

und mit $(\text{III}'') = (\text{II}') + (\text{III}')$ erhält man schließlich die Form

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II}') \\ \text{(III}'') \end{array}$$

Die obere Matrix enthält eine Nullzeile.

Das gegebene Gleichungssystem hat also unendlich viele Lösungen.

Setzt man $x_3 = t \in \mathbb{R}$, dann folgt aus (II')

$$
\begin{aligned}
-3x_2 + 5t &= -1 && \mid -5t \\
-3x_2 &= -1 - 5t && \mid \cdot \left(-\tfrac{1}{3}\right) \\
x_2 &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{3}t
\end{aligned}
$$

Aus (I) folgt schließlich

$$
\begin{aligned}
x_1 - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{3}t) + t &= 1 \\
x_1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3}t &= 1 && \mid + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}t \\
x_1 &= \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3}t
\end{aligned}
$$

Als Lösung ergibt sich damit

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}t \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ;\ t \in \mathbb{R}
$$

bzw. mit $t = 3r$

$$
\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad ;\ r \in \mathbb{R}
$$

zu b) Jede der drei Gleichungen kann man geometrisch als Ebene im dreidimensionalen Raum auffassen. Diese Ebenen sind nicht parallel und haben als Schnittgerade s die Gerade

$$
s: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad ;\ r \in \mathbb{R}
$$

Zur geometrischen Veranschaulichung siehe die Skizze oben (erste Seite).